TAYLORSERIER

LABORATION MED MAXIMA/GNUPLOT

EUROPASKOLAN STRÄNGNÄS

JOHAN WILD 2009-10-13

1 Inledning

Denna laboration syftar till att du skall få lite insikt i något som kallas Taylorserier. Minns att man kan approximera en deriverbar funktion med en linje i en given punkt. Detta skall nu utvidgas till att göra bättre approximationer än med en linje.

För vissa funktioner f gäller att om f är oändligt många gånger deriverbar i en omgivning av punkten a, så kan f skrivas som en *potensserie*:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{2\cdot 3}(x-a)^3 + \cdots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{k!}(x-a)^k. \end{aligned}$$

En potensserie är "ett polynom med oändligt många termer". Här är $f^{(n)}$ är den n:te derivatan av f (derivata av ordning 0 är f själv), och symbolen $n!$ (utläses n-fakultet) fungerar såhär: $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ o s v.

Notera att summan alltså skall innehålla oändligt många termer för att likhet skall råda. Om summan avbryts efter ett antal termer så får man naturligtvis en approximation som blir bättre ju fler termer som tas med.

Det som brukar kallas en linjär approximation av en funktion i en punkt a är att avbryta summan efter två termer. Då fås ett yttryck vars graf är en rät linje som går genom punkten $(a, f(a))$ och med riktningskoefficient $f'(a)$:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a).$$

2 Huvuduppgift

Genomför nu följande, med hjälp av Maxima och/eller Gnuplot.

1. Konstruera en funktion som inte är ett polynom.

2. Välj en punkt och beräkna funktionsvärdet och värdet av funktionens derivata i den punkten. Bilda en linjär approximation till funktionen kring din punkt.

3. Rita grafen av din funktion och dess approximation i ett intervall som innehåller din valda punkt.

4. Bilda högre derivator av din funktion och beräkna dess värde i din punkt. Bilda på så sätt en allt bättre och bättre approximation av din funktion.
5. Gör en bild där det tydligt framgår att du får en bättre och bättre approximation då fler termer tas med i summan.

Om du vill göra ett snyggt Maxima-hack kan du med fördelen använda kombinationer av funktionerna `sum` och `diff(f,x,n)` i uppgift 4

3 Lite smått och gott

Det finns mycket man kan säga om denna sorts serieutvecklingar. Till exemepel kan man fråga sig om summan konvergerar för alla x, eller om alla funktioner går att approximera på detta sätt.

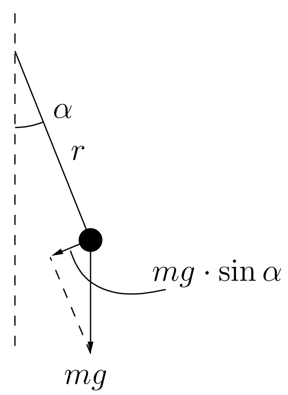
6. Försök göra en linjär och en kvadratisk approximation till funktionen $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ kring $x = 0$.

Vidare är det bra att känna till att man ibland måste gå vidare till den kvadratiska approximationen om $f'(x) = 0$ i den punkt man är intresserad av.

7. Bilda en linjär och en kvadratisk approximation till funktionen $f(x) = \cos(x)$ kring $x = 0$.

Till sist vill jag bara visa på en tillämpning som inte bara rör funktioner. Betrakta en punktformig kropp med massan m som hänger i ett masslöst snöre med längden r. Kroppen sätts i svängning och utslaget från jämviktsläget betecknas α. Detta är en så kallad matematisk pendel. Notera att α alltså beror av tiden: $\alpha(t)$.

Kraftsituationen för kroppen framgår av bilden nedan.



Newtons andra lag blir då differentialekvationen

$$mr \cdot \frac{d\alpha}{dt} = mg \cdot \sin(\alpha).$$

Denna DE löser man inte i första taget. Men om man bara är intresserad av små svängningar så kan man använda approximationen $\sin(x) \approx x$ kring $x = 0$. Det förenklar situationen till

$$mr \cdot \frac{d\alpha}{dt} = mg \cdot \alpha,$$

vilket är betydligt enklare att hitta en lösning till.

8. Lös DE ovan. (Detta gör du nog enklast utan Maxima.)