



TAL OCH POLYNOM

JOHAN WILD

14 AUGUSTI 2008

Innehåll

1	Inledning	3
2	Att gå mellan olika typer av tal	3
3	De hela talen och polynom	4
3.1	Polynom	4
3.2	Räkning med polynom	5
3.3	Faktorisering av polynom	8
3.4	Sgd och mgm	9
3.5	Polynomdivision	10
3.6	Sammanfattning över likheterna	11
4	De rationella talen och rationella uttryck	12
4.1	Räkning med rationella tal	13
4.2	Rationella uttryck	14
5	Reella tal och potensserier	15
5.1	Decimalform	16
5.2	Konvergensradie	17
5.3	Algebraiska tal och funktioner	18
6	Avslutning	19

1 Inledning

Matematiker försöker alltid att vara så generella som möjligt. Om det inte är absolut nödvändigt uttalar man sig ogärna om något enskilt fall. Finns det en struktur som dyker upp på flera ställen försöker man påvisa egenskaper för allt som har denna struktur.

Denna text syftar till att exemplifiera detta. De räkneregler som gäller för heltalen gäller även för polynom. Mycket av det man kan göra med tal kan man även göra med polynom, till exempel hitta den största gemensamma delaren till två polynom.

På samma sätt finns det motsvarigheter till rationella tal och reella tal. Tabellen nedan sammanfattar processen.

Ring		Kropp		(Supremumegenskapen)
Heltal	→	Rationella tal	→	Reella tal
↓		↓		↓
Polynom	→	Rationella funktioner	→	Potensserier

Förkunskaperna till denna text är begreppen faktor, delare, primtal, minsta gemensamma multipel, största gemensamma delare samt relativt prima.

2 Att gå mellan olika typer av tal

Leopold Kronecker (1823-1891) sade att ”Gud skapade heltalen. Allt annat är människans verk”. Detta uttalande gjordes under den tid då matematikerna hade upptäckt att vår intuition lätt leder oss fel. Till exempel går det att konstruera en kurva som bara består av hörn. Det finns också lika många rationella tal som det finns naturliga tal, trots att det finns oändligt många rationella tal mellan noll och ett.

Under 1800-talet började matematikerna därför försöka bli mer och mer precisa i sina definitioner och utreda de logiska konsekvenserna av dessa definitioner. I den processen skapade, eller upptäckte, man matematikens storskaliga struktur.

Någonting måste man hur som helst utgå ifrån. De naturliga talen och hur man adderar och multiplicerar dessa ansåg man vara givet. Däremot måste de hela talen definieras endast med detta som grund. Därefter måste man precisera exakt vad man menar med addition och multiplikation för dessa.

De rationella talen och räknereglerna för dessa definieras sedan med de hela talen som grund. Sen är det de reella talens tur.

Exakt hur denna utvidgningsprocess går till ligger utanför målet för denna text, men för varje kapitel inleds med vad man vinner och förlorar i varje steg.

3 De hela talen och polynom

De naturliga talen har en egenskap de hela talen inte har, nämligen ett minsta element. Detta är en viktig egenskap som kan utnyttjas vid matematisk bevisföring. Om ett bevis bygger på att man räknar ned något, kan man vara säker på att processen slutar om man kan vara säker på att de naturliga talen räcker för att ange det som räknas ned.

Det vi vinner är att varje tal har en additiv invers. Det går att göra addition ogjort, ekvationen $x + 3 = 5$ går att lösa.

3.1 Polynom

Ett polynom är ett uttryck på formen

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

där a_n till a_1 är tal och kallas för *koefficienter* och talet a_0 kallas för den *konstanta termen*. Om talen är heltal säger man att polynomet är *över* de hela talen. Vi skall senare behandla polynom över andra talmängder.

Talet n skall var ett heltal och anger polynomets *grad*. För att detta skall vara meningsfullt måste $a_n \neq 0$ gälla.

Exempel 3.1.1. Polynomet $3x^2 - 2x + 7$ är ett polynom av grad två. Koefficienten framför x^2 är 3, koefficienten framför x är -2 . Den konstanta termen är 7. Polynomet x är ett polynom av grad 1.

Talet 4 kan betraktas som ett polynom av grad noll.

Uttrycken \sqrt{x} , $\frac{1}{x^2-3}$ och $x^{1,2}$ är inte polynom..

Uttrycket $\frac{1}{2}x^2 - 3x$ är visserligen ett polynom, men inte ett polynom över \mathbb{Z} eftersom koefficienten $\frac{1}{2}$ inte är ett heltal. ▲

Ett polynom är inte en funktion eller en ekvation. Däremot kan en funktion uttryckas med ett polynom, och kallas då ibland *polynomfunktion*. Dessutom kan en ekvation uttryckas med polynom. Ekvationen kallas då *polynomekvation*.

Exempel 3.1.2. Funktionen $f(x) = 3x - 6$ definieras med ett polynom av grad ett. I ekvationen $x^2 - x = \sqrt{x} + 2$ är vänsterledet ett polynom av grad två, men högerledet är inte ett polynom. Därför är ekvationen inte en polynomekvation. ▲

Vid räkning med polynom är man alltså i allmänhet inte intresserad av att beräkna polynomets värde för något värde på x , eller intresserad av att lösa en ekvation! Symbolen x används endast för att underlätta beräkningar.

3.2 Räkning med polynom

Polynom kan betraktas som ett slags generaliserat tal. Jämför definitionen av polynom med hur vi uttrycker tal i basen tio. Det som skiljer är att koefficienterna i ett polynom får vara vilka tal som helt, inte bara talen 0 till 9. På samma sätt som basen 10 i vårt positionssystem används på ett smart sätt för att bokföra siffror vid beräkningar, används symbolen x i polynom för samma sak.

Egentligen är det inte nödvändigt att skriva ut de olika potenserna av x då man sysslar med polynom. De används bara som en slags bokföringshjälp, vilket blir tydligt i exemplen nedan. I högre matematik definieras polynom över en mängd som en följd element ur mängden där endast ändligt många element i följd är nollskilda. På ren svenska betyder detta att det intressanta bara är polynomets koefficienter

Anledningen till att polynom över \mathbb{Z} tas upp i samma kapitel som \mathbb{Z} själv är att de uppfyller samma algebraiska struktur, de är båda exempel på ringar.

Mer precist är en ring R en mängd där det finns två räkneoperationer definierade, addition (med symbolen $+$) och multiplikation (med symbolen \cdot). För dessa räkneoperationer gäller följande.

A1 Slutenhhet: $a + b \in R$ för alla $a, b \in R$.

A2 Addition är kommutativ: $a + b = b + a$ för alla $a, b \in R$.

A3 Addition är associativ: $(a + b) + c = a + (b + c)$ för alla $a, b, c \in R$.

A4 Det finns ett element $0 \in R$ som uppfyller att $0 + a = a$ för alla $a \in R$.

A5 Till varje $a \in R$ finns ett element $-a$ med egenskapen att $a + (-a) = 0$.

M1 Slutenhet: $a \cdot b \in R$.

M2 Multiplikation är kommutativ: $a \cdot b = b \cdot a$ för alla $a, b \in R$.

M3 Multiplikation är associativ: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ för alla $a, b \in R$.

M4 Det finns ett element $1 \neq 0 \in R$ som uppfyller $1 \cdot a = a$ för alla $a \in R$.

D1 Distributiva lagen: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ för alla $a, b, c \in R$.

Skall man vara noga gäller ovanstående axiom en *kommutativ ring*. Om axiomet M2 utelämnas fås en *icke-kommutativ ring* (vilket ordet ring normalt står för).

Exempel 3.2.1. Du har säkert räknat med polynom på grundskolan, även om rubriken då säkert var något i stil med addition och multiplikation av parenteser. Låt oss studera några exempel med polynomen $2x^2 - 3x + 1$ och $x + 5$.

$$(2x^2 - 3x + 1) + (x + 5) = 2x^2 - 2x + 6$$

$$(2x^2 - 3x + 1) \cdot (x + 5) = 2x^3 + 10x^2 - 3x^2 - 15x + x + 6 = 2x^3 + 7x^2 - 14x + 6$$

▲

Detta är det normala sätt att ställa upp beräkningar med polynom. Det är dock intressant att notera att algoritmerna för räkning med tal fungerar även för polynom. Jämför följande exempel.

$$\begin{array}{r} 96 \\ + 32 \\ \hline 128 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^2 - 3x + 5 \\ + 3x^2 + 2x - 7 \\ \hline 4x^2 - x - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \cdot 14 \\ \hline 168 \\ + 42 \\ \hline 588 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^2 + 3x - 7 \\ \cdot \quad \quad \quad x + 2 \\ \hline 2x^2 + 6x - 14 \\ + x^3 + 3x^2 - 7x \\ \hline x^3 + 5x^2 - x - 14 \end{array}$$

För att visa hur axiomen för räkning med element i ringar kan användas kan vi studera följande sats.

Sats 3.2.2. *Kvadreringsregeln* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ gäller i alla ringar.

Du är van att se detta resultat i tillämpningar av typen $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Det som i själva verket står inom parentes är summan av ett polynom av grad ett och ett polynom av grad noll. Frågan är nu om regeln gäller även i fallet

$$(f(x) + g(x))^2 = (f(x))^2 + 2 \cdot f(x) \cdot g(x) + (g(x))^2$$

där $f(x)$ och $g(x)$ är vilka polynom som helst.

Bevis. Studera

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2.$$

Det som "gör regeln" är att vi kan skriva de två termerna i mitten som $2ab$. Det som krävs för att vi skall få göra det är att

$$ba = ab.$$

I en ring gäller detta enligt M2 på sida 6. □

På samma sätt kan man visa att konjugatregeln också gäller i alla ringar. Räkning går alltså till på samma sätt i alla ringar. Därför finns en rad begrepp som du känner igen från talteorn i alla ringar. Tabellen nedan visar vilka begrepp som tas upp i denna text.

Begrepp

addition, (subtraktion)

multiplikation

additiv invers

faktor

delare

primtal / irreducibel

relativt prima

sgd

mgm

kvot

rest

Vi har redan berört räknesätten. Anledningen till att subtraktion står inom parentes är att det inte är ett eget räknesätt. Skrivättet $a - b$ betyder $a + (-b)$.

Innan vi går vidare kan det vara bra att notera följande.

Sats 3.2.3. *Om ett polynom av grad n multipliceras med ett polynom av grad m , blir produkten ett polynom av grad $n + m$.*

Detta är exemplifierat i ekvation 3.2.1 där ett polynom av grad 2 multipliceras med ett polynom av grad 1, och produkten blir ett polynom av grad 3.

3.3 Faktorisering av polynom

Sats 3.2.3 antyder att ett polynom av grad 2 skulle kunna skrivas som en produkt av två polynom av grad 1, att man skulle kunna faktorisera polynom av grad 2. Det är ibland möjligt. Det finns polynom som inte går att faktorisera. Dessa kallas för *irreducibla polynom*. Detta motsvarar naturligtvis begreppet primtal, men man säger alltså inte primpolynom.

Exempel 3.3.1. En tillämpning av konjugatregeln

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2),$$

och en tillämpning av kvadreringsregeln

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

är två exempel där faktorisering är möjlig. Lägg märke till att det senare fallet gav upphov till en faktor med multiplicitet två.

Polynomet

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$$

går som synes också att faktorisera till två faktorer av multiplicitet ett. Däremot är polynomet $x^2 + x + 6$ ej möjligt att faktorisera, det är irreducibelt. ▲

Precis som för tal finns det ingen bra algoritm för att faktorisera polynom. Speciellt inte om man håller stenhårt fast vid att betrakta polynom som ett generaliserat tal.

Däremot kan man komma vidare om man byter synvinkel, och betraktar polynomen som funktioner. Antag till exempel att vi vill faktorisera polynomet $x^2 + x - 20$. Om detta skulle vara möjligt skulle det alltså gå att hitta två tal a och b så att

$$x^2 + x - 20 = (x - a)(x - b).$$

Bilda nu polynomfunktionen

$$f(x) = x^2 + x - 20 = (x - a)(x - b).$$

Värdet för funktionen f då $x = a$ måste vara noll eftersom

$$f(a) = a^2 + a - 20 = \underbrace{(a - a)}_{=0}(a - b) = 0.$$

På samma sätt måste $f(b) = 0$ gälla. Om vi kan hitta de värden på x som ger funktionsvärdet noll, om vi kan lösa ekvationen $x^2 + x - 20 = 0$, kan vi alltså få reda på vad a och b skall vara.

Detta är ett mycket bra exempel på hur nyckfull matematiken kan vara. Som tidigare nämnts är polynom ett slags generaliserat tal, och har ingenting alls med ekvationer att göra. Ändå måste man byta synsätt, och betrakta polynomet som en funktion och till sist som en ekvation för att kunna genomföra faktoriseringen, något som egentligen är förknippat med polynomen som generaliserade tal.

Även polynom av högre grad än två kan i princip faktoriseras genom att sätta polynomet lika med noll och lösa denna ekvation. I praktiken är detta inte möjligt utom i vissa specialfall. För polynom av grad tre och fyra finns lösningsformler, men de är långa och tas inte upp på gymnasiet. För polynom av grad fem och högre kan man visa att det inte är möjligt att skapa lösningsformler. Det visade Galois (1811 - 1832).

En sista detalj att ta upp är att faktorisering av polynom inte är helt entydig. En konstant faktor kan flyttas mellan faktorerna utan att polynomet ändras, vilket exemplifieras med

$$2x^2 - 6x + 4 = 2(x - 1)(x - 2) = (2x - 2)(x - 2) = (x - 1)(2x - 4).$$

3.4 Sgd och mgm

Dessa begrepp har sin naturliga motsvarighet bland polynomen, vilket följande exempel visar.

Exempel 3.4.1. Bestäm den största gemensamma delaren och den största gemensamma multipeln till polynomen

$$p_1 = x^4 - x^3 - 12x^2 + 28x - 16$$

och

$$p_2 = x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 70x - 88.$$

Lösning Polynomen måste först faktoriseras. Hur detta görs låter vi inte bekymra oss nu, det är inte viktigt för att belysa det viktiga just nu.

$$p_1 = x^4 - x^3 - 12x^2 + 28x - 16 = (x - 2)^2(x - 1)(x + 4)$$

$$p_2 = x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 70x - 88 = (x - 2)(x + 4)(x^2 - 6x + 11)$$

För att repetera noterar vi att det första polynomet har tre faktorer av grad ett, varav en har multiplicitet två. Det andra polynomet har två faktorer av grad ett och en faktor (irreducibel naturligtvis) av grad två.

Även för polynom att den största gemensamma delaren för dessa polynom är den största gemensamma faktorn. Vi ser att $x - 2$ och $x + 4$ finns i båda polynomen. Därför fås

$$\text{sgd}(p_1, p_2) = (x - 2)(x + 4) = x^2 + 2x - 8.$$

Den minsta gemensamma multipeln är produkten av alla faktorer som finns i någon av polynomen. Därför fås

$$\begin{aligned} \text{mgm}(p_1, p_2) &= (x - 2)^2(x - 1)(x + 4)(x^2 - 6x + 11) = \\ &= x^6 - 7x^5 + 5x^4 + 89x^3 - 316x^2 + 404x - 176. \end{aligned}$$

▲

3.5 Polynomdivision

Begreppen kvot och rest finns också bland polynomen och fungerar på precis samma sätt här som för heltal. Även algoritmen för division fungerar för polynom.

Exempel 3.5.1. Då polynomet $x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ delas med polynomet $x + 7$ fås kvoten $x^2 - 2x - 12$ och resten -108 ,

$$x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = (x^2 - 2x - 12)(x + 7) - 108.$$

▲

Jämför med motsvarande situation för tal, till exempel gäller att man får resten 3 då 15 delas med 6 eftersom $15 = 2 \cdot 6 + 3$.

Algoritmen för division av tal är tillämpbar även för polynom, vilket exemplen nedan visar.

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} 172 \\ 1035 \overline{)6} \\ -6 \\ \hline 43 \\ -42 \\ \hline 15 \\ -12 \\ \hline 3 \end{array} & \begin{array}{r} x^2 - 2x - 12 \\ x^3 + 5x^2 - 2x - 24 \overline{)x + 7} \\ -x^3 + 7x^2 \\ \hline -2x^2 - 2x \\ - -2x^2 - 14x \\ \hline 12x - 24 \\ - 12x - 84 \\ \hline -108 \end{array} \end{array}$$

Sats 3.5.2. *Då ett polynom av grad n delas med ett polynom av grad m , blir resten ett polynom av grad högst $n - m$.*

Ur argumentationen för att ett polynom har en faktor $x - a$ om motsvarande funktion har ett nollställe för $x = a$ fås att man kan kontrollera om en division med $x - a$ kommer att gå jämnt upp genom att man sätter in $x = a$ i polynomet och kontrollerar om man får värdet noll. Föregående sats kan användas för att få ännu mer information av ett dylikt test.

Sats 3.5.3. *Om ett polynom delas med $x - a$ blir resten lika med polynomets värde för $x = a$.*

Bevis. Om divisionen inte går jämnt upp skall resten enligt sats 3.2.3 bli ett polynom av grad noll (ett mindre än graden för det man delar med, som i detta fall är ett). Ett polynom av grad noll är en konstant. Låt f vara det polynom som delas med $x - a$ och låt resten vara konstanten C . Då fås alltså

$$f(x) = (x - a)(\text{kvot}) + C.$$

Om $x = a$ sätts in i f fås

$$f(a) = \underbrace{(a - a)}_{=0}(\text{kvotens värde för } x = a) + C = C.$$

□

3.6 Sammanfattning över likheterna

Vi ser alltså att det finns en rad likheter mellan mängderna \mathbb{Z} och mängden av alla polynom över \mathbb{Z} . Dessa sammanfattas här.

- De uppfyller samma algebraiska struktur.
- Man kan tillämpa samma algoritmer vid beräkningar.
- Både tal och polynom kan faktoriseras eller inte faktoriseras. Tal som inte kan faktoriseras kallas primtal, polynom som inte kan faktoriseras kallas irreducibla.
- Det gånger en faktor förekommer i en faktorisering kallas faktorns multiplicitet.
- Begreppen största gemensamma delare och minsta gemensamma multipel gäller båda mängderna.
- Begreppen kvot och rest gäller båda mängderna. För polynom gäller dessutom att resten kan beräknas genom sats 3.5.3.

4 De rationella talen och rationella uttryck

De rationella talen betecknas med symbolen \mathbb{Q} , som i engelskans ord för kvot, quotient.

Det man vinner i och med utvidgningen från \mathbb{Z} är existensen av den multiplikativa inversen till varje element (utom noll). Vi kan då göra multiplikation o gjort, vi kan lösa ekvationen $3x = 1$.

Det vi förlorar är att de rationella talen inte går att räkna upp i storleksordning.

De rationella talen utgör en *ring*. Mer precist är en ring en mängd där det finns två räkneoperationer definierade, addition (med symbolen $+$) och multiplikation (med symbolen \cdot). För dessa räkneoperationer gäller följande.

A1 Slutenhet: $a + b \in R$ för alla $a, b \in R$.

A2 Addition är kommutativ: $a + b = b + a$ för alla $a, b \in R$.

A3 Addition är associativ: $(a + b) + c = a + (b + c)$ för alla $a, b, c \in R$.

A4 Det finns ett element $0 \in R$ som uppfyller att $0 + a = a$ för alla $a \in R$.

A5 Till varje $a \in R$ finns ett element $-a$ med egenskapen att $a + (-a) = 0$.

M1 Slutenhet: $a \cdot b \in R$.

M2 Multiplikation är kommutativ: $a \cdot b = b \cdot a$ för alla $a, b \in R$.

M3 Multiplikation är associativ: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ för alla $a, b \in R$.

M4 Det finns ett element $1 \neq 0 \in R$ som uppfyller $1 \cdot a = a$ för alla $a \in R$.

M5 Till varje $a \neq 0 \in R$ finns ett element a^{-1} med egenskapen att $a \cdot a^{-1} = 1$.

D1 Distributiva lagen: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ för alla $a, b, c \in R$.

Det som skiljer ringar från kroppar är alltså det sista axiomet rörande multiplikation, M5. Detta axiom garanterar att det finns en multiplikativ invers till alla element i kroppen (utom elementet 0).

De begrepp som är gemensamma för alla kroppar sammanfattas i tabellen nedan.

Begrepp

multiplikativ invers

förlänga

förkorta

minsta gemensamma nämnare

4.1 Räkning med rationella tal

Precis som för de hela talen är $a - b$ bara ett kortare skrivsätt för $a + (-b)$. På samma sätt är $\frac{a}{b}$ bara ett kortare skrivsätt för $a \cdot b^{-1}$. Detta känner du igen från räkning med rationella tal. Istället för att egentligen utföra division, ”vänder man upp och ned” på nämnaren och multiplicerar med detta. Att ”vända upp och ned” på ett rationellt tal är just att bilda den multiplikativa inversen.

Exempel 4.1.1. Beräkna

$$\frac{2}{3} / \frac{7}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}.$$

▲

Här används att den multiplikativa inversen till $\frac{5}{7}$ är $\frac{7}{5}$ eftersom $\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5} = 1$. Den formella definitionen av räkning med rationella tal följer nu.

Definition 4.1.2. Om $\frac{a}{b}$ och $\frac{c}{d}$ är rationella tal, låter vi symbolerna $+$ och \cdot betyda

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + bc}{b \cdot d}$$

och

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

där addition och multiplikation i täljare och nämnare i högerleden är de som gäller för heltal.

Ett mycket viktigt begrepp som finns bland de rationella talen, som av naturliga skäl inte finns bland de hela talen, är minsta gemensamma nämnare. Däremot är detta på sätt och vis ändå inte ett nytt begrepp. Den minsta gemensamma nämnaren för två rationella tal är helt enkelt den minsta gemensamma multipliken för nämnarna!

Andra viktiga begrepp som du känner igen är förlängning och förkortning.

4.2 Rationella uttryck

På samma sätt som polynomen liknar de hela talen på många sätt och vis, finns det en motsvarighet till de rationella talen. De kallas rationella uttryck, och är kvoten mellan två polynom.

Exempel 4.2.1. Uttrycken

$$\frac{x-2}{x^2},$$
$$\frac{1}{x}$$

och

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{x^{30} - x}$$

är rationella uttryck. ▲

Precis som hos de rationella talen, finns även här begreppen minsta gemensamma nämnare, förlängning och förkortning.

Exempel 4.2.2. Beräkna

$$\frac{x+2}{x^3-9} + \frac{x-5}{x^3+3x}.$$

Precis som för rationella tal måste man först bestämma den minsta gemensamma nämnaren. Det gör man genom att faktorisera nämnarna och förlänger varje med de faktorer som saknas.

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x^3-9} + \frac{x-5}{4x+12} &= \frac{x+2}{x(x-3)(x+3)} + \frac{x-5}{4(x+3)} = \\ &= \frac{(x+2) \cdot 4}{x(x-3)(x+3) \cdot 4} + \frac{(x-5) \cdot x(x-3)}{4(x+3) \cdot x(x-3)} = \\ &= \frac{(x+2) \cdot 4 + (x-5) \cdot x(x-3)}{x(x-3)(x+3) \cdot 4} \\ &= \frac{4x+8+x^3-3x^2-5x^2+15x}{x(x-3)(x+3) \cdot 4} \\ &= \frac{x^3-8x^2+19x+8}{4x^3-36x} \end{aligned}$$
▲

Exempel 4.2.3. Beräkna

$$\frac{x^2-9}{4x^2+12x+9} \bigg/ \frac{x^2+6x+9}{2x+3}.$$

Division är alltså inte väldefinierat. Det man menar med skrivsättet är att man skall multiplicera med den multiplikativa inversen istället.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 9}{4x^2 + 12x + 9} \Big/ \frac{x^2 + 6x + 9}{2x + 3} &= \frac{x^2 - 9}{4x^2 + 12x + 9} \cdot \frac{2x + 3}{x^2 + 6x + 9} = \\ &= \frac{(x - 3)(x + 3)}{(2x + 3)^2} \cdot \frac{2x + 3}{(x + 3)} = \\ &= \frac{x - 3}{2x + 3} \end{aligned}$$

▲

Precis som för polynom skiljer vi på det algebraiska konceptet rationellt uttryck. Om en funktion definieras med ett rationellt uttryck kallar man det rationell funktion. Det finns dock böcker där man bara använder ett av namnen för båda koncepten. Det finns naturligtvis också rationella ekvationer.

Om man har en rationell funktion måste man däremot se upp med att denna inte nödvändigtvis är definierad i alla punkter. Om nämnaren blir noll för något värde på x är inte funktionen definierad där.

Exempel 4.2.4. Funktionen

$$f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 4}$$

är inte definierad för $x = \pm 2$.

▲

5 Reella tal och potensserier

Nästa steg i utvidgningen av talen är att gå från de rationella talen till de reella talen. Symbolen som används för dessa är \mathbb{R} .

Poängen med att konstruera dessa är att det till exempel inte finns något rationellt tal vars kvadrat är två, det finns med andra ord ingen lösning till ekvationen $x^2 = 2$ bland de rationella talen. Rent tekniskt så har de reella talen något som kallas *supremumegenskapen*. Att visa vad det är och hur man då kan definiera vad som menas med $\sqrt{2}$ är en aning tekniskt och utelämnas därför. Det är också anledningen att denna egenskapen är satt inom parentes i tabellen på sida 3.

Det man förlorar är att de reella talen inte går att räkna upp.

De reella talen utgör, precis som de rationella, en kropp. Det finns alltså inga nya algebraiska axiom för dessa.

Motsvarigheten bland uttrycken heter *potensserier* och är uttryck på formen

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

Detta uttryck innehåller alltså oändligt många termer. Det är därför inte ett polynom.

De begrepp som är gemensamma för reella tal och potensserier sammanfattas i tabellen nedan.

Begrepp
decimalform
algebraisk
transcendent

5.1 Decimalform

Rationella tal kan uttryckas på decimalform. Då gäller att decimalutvecklingen förr eller senare blir periodisk. För att visa vilka decimaler som skall upprepas skriver man ibland ett streck ovanför dessa.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 0,\overline{3} = 0,333333\dots \\ \frac{1}{4} &= 0,25\overline{0} = 0,250000\dots \\ \frac{1}{7} &= 0,\overline{142857} = 0,142857142857142857\dots \end{aligned}$$

Givet ett tal på decimalform som har en periodisk decimalutveckling kan man alltid hitta motsvarande rationella tal. Följande exempel visar hur.

Exempel 5.1.1. Finn det rationella tal som motsvarar $x = 0,\overline{158}$.

Tekniken går ut på att multiplicera x med en potens av 10 så att lämpligt antal decimaler "skiftas upp". I detta fall multiplicerar vi med 1000 eftersom det decimalerna upprepas med perioden tre.

$$\begin{array}{r} 1000x = 158,158158158\dots \\ - \quad \quad \quad x = 0,158158158\dots \\ \hline (1000 - 1)x = 158,0 \end{array}$$

Vi får

$$x = \frac{158}{1000 - 1} = \frac{158}{999}.$$



Alla rationella uttryck kan skrivas som en potensserie. En potensserie med periodisk koefficientserie motsvarar en rationell funktion. Ett exempel på detta ges nedan. Tekniken är densamma som den som gällde för tal.

Exempel 5.1.2. Finn den rationella funktion som svarar mot potensserien

$$f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_0x^3 + a_1x^4 + a_2x^5 + \dots$$

Här får vi multiplicera $f(x)$ med x^3 för att skifta termerna uppåt.

$$\begin{array}{r} f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_0x^3 + a_1x^4 + a_2x^5 + \dots \\ x^3 f(x) = + a_0x^3 + a_1x^4 + a_2x^5 + \dots \\ \hline - (1 - x^3)f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + 0 \end{array}$$

Vi får

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2}{1 - x^3}.$$

▲

Det omvända gäller däremot inte! Alla rationella funktioner får inte en periodisk koefficientserie då den skrivs som en potensserie. Det gäller bara för de där nämnaren är på formen $x^n - 1$ eller $x^n + 1$.

Exempelvis gäller

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 + 1} &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \\ \frac{1}{1 + x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \\ \frac{1}{1 - x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\ \frac{1}{1 - 2x} &= 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots \end{aligned}$$

5.2 Konvergensradie

Hittills har vi tagit upp potensserier som en slags motsvarighet för till decimalform för rationella uttryck. Om man istället betraktar dem som uttryck för funktioner måste man se upp!

Likheten

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

gäller uppenbart inte för alla x . För $x = 1$ får vi en division med noll, för $x > 1$ blir högerledet oändligt stort, medan vänsterledet ligger mellan -1 och noll.

För alla potensserier finns ett tal r så att likheten gäller för alla x i intervallet $-r < x < r$. Talet r brukar kallas seriens *konvergensradie*.

Hur som helst belyser detta problem det faktum att det är en fundamental skillnad mellan algebraiska skapelser som polynom, rationella uttryck och potensserier, och motsvarande begrepp som funktioner.

5.3 Algebraiska tal och funktioner

De reella tal som inte är rationella tal får en decimalutveckling som inte är periodisk. Det gäller till exempel för $\sqrt{2}$ och π .

De reella talen är överuppräknligt många. På samma sätt är mängden av alla potensserier överuppräknlig.

De reella talen kan delas in i algebraiska tal och transcendent tal enligt följande definition.

Definition 5.3.1. Tal som är lösningar till polynomekvationer med heltalskoefficienter benämns *algebraiska tal*. Tal som inte är algebraiska benämns *transcendent*.

Exempelvis är $\sqrt{2}$ algebraiskt eftersom det är en av lösningarna till ekvationen $x^2 - 2 = 0$. Däremot är π inte algebraiskt. Man kan visa att de algebraiska talen är uppräknliga. Därför måste de transcendent vara överuppräknliga eftersom hela \mathbb{R} är det. Det finns några exempel till på transcendent tal, men de flesta tal har alltså människan aldrig någonsin stött på.

Man kan göra en liknande uppdelning av funktionerna.

Definition 5.3.2. En *algebraisk funktion* är en funktion som är lösning till en polynomekvation där koefficienterna är polynom. Resterande funktioner benämns *transcendent funktioner*.

Exempel 5.3.3. Alla rationella funktioner är algebraiska eftersom de är lösningar till ekvationen

$$Q(x)y - P(x) = 0.$$

Här är alltså $P(x)$ och $Q(x)$ polynom i x medan vänsterledet ovan är ett polynom i y där koefficienterna är polynom. Funktionen \sqrt{x} är också algebraisk eftersom den är lösning till

$$y^2 - x = 0.$$

Några transcendent funktioner är $\sin(x)$, e^x och $\ln(x)$. ▲

De algebraiska funktionerna är uppräknliga, vilket de transcendent inte är.

De flesta funktioner har människan alltså aldrig stött på!

6 Avslutning

Du har i denna text fått ett litet smakprov på matematikens storskaliga struktur. Du har sett att vissa begrepp som du kände till från talteorin gäller för fler matematiska skapelser som uppfyller vissa axiom.

Du har också sett att det är skillnad på att betrakta till exempel ett polynom som ett sorts tal, och på den ekvation och den funktion som definieras med samma polynom.

Sammanfattningsvis har vi avhandlar följande strukturer och begrepp.

Ring	Kropp	(Supremumegenskapen)
Heltal	→	Rationella tal
↓		↓
Polynom	→	Rationella uttryck
↓		↓
Addition	→	Reella tal
Additiv invers (Subtraktion)	→	Potensserier
Multiplikation	→	Decimalutveckling
Faktor	→	Algebraisk
Primtal	→	Transendent
Irreducibel	→	
Kvot	→	
Delare	→	
Rest	→	
SGD	→	
MGM	→	
Relativt prima	→	

Detta är naturligtvis bara ett litet exempel på hur matematiken hänger ihop. Även om man bara håller sig till tal och algebra så finns det mycket mer att lära. Till exempel finns det en ännu enklare struktur som heter *grupp*, vilken består av en mängd med bara ett enda räknesätt. I en grupp är faktorisering inte entydig, men man kan dela in elementen i klasser.

Mycket är också utelämnat i denna text. Exakt hur det går till att definiera de olika typerna av tal är egentligen fullt nåbart på gymnasiet.

Något som mycket väl skulle kunnat tas upp i denna text är exempel på

en kropp med ändligt antal element. Om man räknar som man ibland gör på en klocka, $4 + 9 = 1$ och $2 \cdot 7 = 2$, så finner man att alla element (talen 0 till 11) inte har en multiplikativ invers.

Detta gäller däremot om antalet timmar på klockan är ett primtal. Testa så får du se!