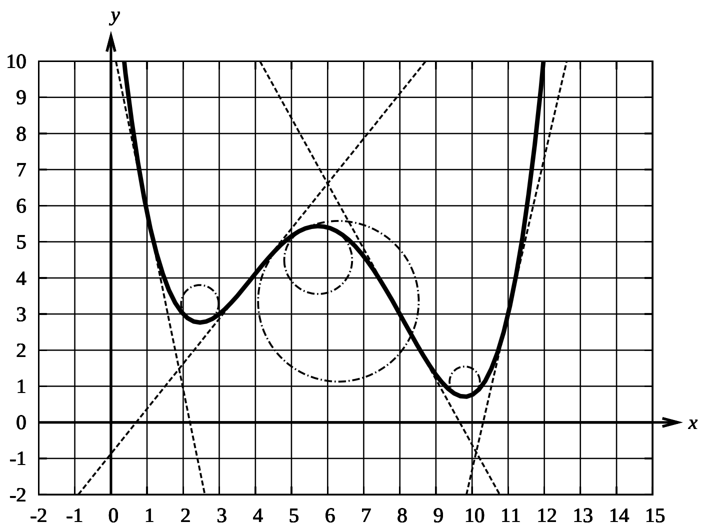


Polynom av grad tre

Johan Wild

johan.wild@europaskolan.se

26 januari 2010

Innehåll

1 Inledning

Analys är en viktig gren av matematiken. Med denna term menas att utreda egenskaper för funktioner. För att kunna göra detta måste vi göra några definitioner. Vi håller oss till fallet $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Som vanligt i matematiken finns det spännande exempel som motsäger vår intuitiva bild av hur saker beter sig.

Till exempel finns det funktioner som är kontinuerliga, men inte deriverbara i någon punkt. Fundera på detta faktum då du tränat på begreppen som tas upp i detta häfte.

1.1 Definitioner och satser

Definition 1.1.1. Det största (minsta) värde f antar i ett intervall benämns *globalt maximum* (*minimum*) för f (i det aktuella intervallet). Det värde på x för vilket detta inträffar kallas *maximipunkt* (*minimipunkt*). Värdet f antar i sin maximipunkt (minimipunkt) kallas även *maximivärde* (*minimivärde*) av f.

Som extra träning i att tolka matematiska symboler, kan vi skriva ovanstående definition så att $x \in I$ är en maximipunkt på det slutna intervallet I om det gäller $f(x) \geq f(x') \quad \forall \quad x' \in I$.

Definition 1.1.2. Om det finns ett öppet delintervall där f har ett maximum (minimum) säger man att f har ett *lokalt maximum* (*minimum*) i detta intervall.

Ibland är det bara intressant om det finns ett maximum eller minimum över huvud taget, inte vilket av alternativen de är. Därför gör vi följande definition.

Definition 1.1.3. En *extrempunkt* är antingen en maximipunkt eller minimipunkt.

Ibland slarvar man lite med språket. I en graf kan till exempel maximipunkt betyda den punkt som har koordinaten (maximipunkt,motsvarande maximum). Sammanhanget avgör om man skall tolka maximipunkten som ett värde på x eller som en punkt i koordinatsystemet. Enligt definitionen är det dock det förra som gäller rent formellt.

Observera att en funktion f inte behöver vara en kontinuerlig funktion för att dessa definitioner skall kunna tillämpas. Som exempel ges funktionen

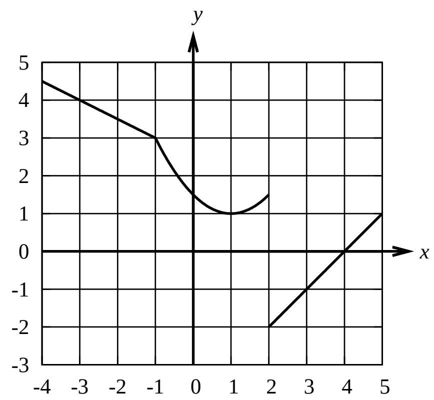
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + \frac{5}{2} & x < -1 \\ \frac{(x-1)^2}{2} + 1 & -1 \leqslant x < 2 \\ x - 4 & 2 \leqslant x \end{cases}$$

vars graf återges nedan.

Begreppet kontinuitet och gränsvärden utreder vi inte närmare, men vi gör följande definition som stämmer väl med inuitionen.

Definition 1.1.4. En funktion är kontinuerlig på ett intervall I om dess höger- och vänster-gräns-värde är lika i varje punkt på I, med matematiska symboler skriver vi

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) \quad \forall \quad a \in I.$$



Denna funktion har två lokala minimum, ett kring $x = 1$ och ett kring $x = 2$. Det sista är även funktionens globala minimum och det minsta värdet f antar är -2.

Något globalt maximum existerar inte eftersom f är definierad på hela $\mathbb{R}$. Inte heller finns något lokalt maximum kring $x = 2$ eftersom f inte antar värdet $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{3}{2}$. Däremot antas högergränsvärdet $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -2$.

Funktionen är inte deriverbar för $x = -1$ eftersom höger- och vänstergränsvärdena för derivatan inte är lika. Mer formellt gäller

$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) \neq \lim_{x\to -1^-} f'(x).$$

Däremot är f kontinuerlig för $x = 1$, vilket inte gäller för $x = 2$. Kontinuitet är som sagt ett begrepp som är ganska avancerat. Notera till exempel att gränsvärdet $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{3}{2}$ existerar, men antas inte av funktionen. Här räcker det med kontatera att grafen ”gör ett hopp” i $x = 2$.

Vi kommer att ha nytta av en mer precis definition av de geometriska begreppen konkav och konvex.

Definition 1.1.5. En funktion är *konvex* (*konkav*) i ett intervall om det för varje delintervall gäller att funktionen antar mindre (större) värden än en linje mellan delintervallets ändpunkter.

Man brukar dela in funktioner i klasser. De av klass C^0 är kontinuerliga, men behöver inte vara deriverbara. De av klass C^1 har kontinuerlig förstaderivata, men dess andraderivata behöver inte vara kontinuerlig och så vidare.

På gymnasienivå brukar man studera funktioner av minst klass C^2, oftast funktioner av klass C^∞. Undantag är till exempel $\tan x$, som inte är kontinuerlig för $x = 90^\circ + 180^\circ n$, $n \in \mathbb{Z}$.

För så ”snälla” funktioner finns det enkla kriterier för att avgöra om och var de är konvexa eller konkava eller om det finns lokala extrempunkter. Detta preciseras i följande satser. Innan de formuleras behöver vi dock göra en definition till.

Definition 1.1.6. Låt f vara en funktion av klass C^1. Om x_0 är en punkt för vilket $f'(x_0) = 0$ gäller, säger man att x_0 är en *stationär punkt* till f.

Sats 1.1.7. *Låt f vara en funktion av klass C^2 och låt $f'(x_0) = 0$ gälla. Då har f ett lokalt maximum (minimum) för x_0 om $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$).*

Sats 1.1.8. *Låt f vara en funktion av klass C^2. Om $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) för alla x i ett intervall är f konvex (konkav) i detta intervall.*

Det finns funktioner som är både konvexa och konkava, men naturligtvis i olika intervall. För dessa fall behöver vi följande definition och sats.

Definition 1.1.9. Om det finns en punkt x_0 för vilken en funktion är konvex på ena sidan om x_0, och konkav på andra sidan om x_0, så är x_0 en *inflexionspunkt* till funktionen.

Sats 1.1.10. *Låt f vara en funktion av klass C^2. Om x_0 är en inflexionspunkt till f gäller $f''(x_0) = 0$.*

Observera att omvändningen till förra satsen inte gäller!

2 Teraövningen

Denna övning är en vidareutveckling av Megaövningen i häftet Polynom av grad två. Syftet är detsamma, nämligen att i en och samma övning träna på allt som finns att veta om polynom av grad tre och lite till.

Även denna övning är upplagd så att det finns en kontroll inbyggd för att undvika möjliga slarvfel.

2.1 Från punkter till polynomform

Välj nollställen för funktionen f. De behöver inte vara olika.

Som exempel väljes här $x_1 = -3$, $x_2 = 2$ och $x_3 = 5$. Funktionen f kan nu skrivas på faktorform som $f(x) = k(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ där k är en konstant.

Med de punkter som valdes som exempel fås

$$f(x) = k(x + 3)(x - 2)(x - 5).$$

För att bestämma k och därmed entydigt bestämma f måste en fjärde punkt väljas som grafen till f skall gå genom.

Som exempel väljes här punkten $(x_4, y_4) = (0, 4)$. Det gör det möjligt att bestämma k, genom att lösa ekvationen

$$\begin{aligned} &f(x_4) = y_4 \\ &f(0) = k(0 + 3)(0 - 2)(0 - 5) = 4 \end{aligned}$$

vilken har lösningen

$$k = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}.$$

Exemplets funktion f blir alltså på faktorform

$$f(x) = \frac{2}{15}(x+3)(x-2)(x-5).$$

På polynomform blir detta

$$f(x) = \frac{2}{15}x^3 - \frac{8}{15}x^2 - \frac{22}{15}x + 4.$$

2.2 Kontroll

För att kontrollera att inget slarv begåtts beräknas funktionsvärdet i de tre nollställena och den fjärde punkten, för att se om det stämmer överens med vad de skall vara. Vi får

$$f(-3) = \frac{2}{15}(-3)^3 - \frac{8}{15}(-3)^2 - \frac{22}{15}(-3) + 4 = 0,$$

$$f(2) = \frac{2}{15}\cdot 2^3 - \frac{8}{15}\cdot 2^2 - \frac{22}{15}\cdot 2 + 4 = 0,$$

$$f(5) = \frac{2}{15}\cdot 5^3 - \frac{8}{15}\cdot 5^2 - \frac{22}{15}\cdot 5 + 4 = 0,$$

och

$$f(0) = \frac{2}{15}\cdot 0^3 - \frac{8}{15}\cdot 0^2 - \frac{22}{15}\cdot 0 + 4 = 4.$$

Bra!

2.3 Bestäm lokala extrempunkter

Nu skall vi bestämma koordinaterna för de lokala extrempunkterna, samt bestämma om de är maxima eller minima. Detta sker i flera steg. Eftersom f är ett polynom tillhör f klass C^∞. Enligt sats 1.1.7 kan vi hitta extrempunkterna genom att derivera f så att vi kan bilda ekvationen $f'(x) = 0$.

Lösningen till denna ekvation ger de värden på x där derivatan är noll, de värden på x där f har lokala extrempunkter. Vidare säger sats 1.1.7 att vi kan avgöra extrepunkternas typ genom att studera tecknet på andraderivatan till f i dessa punkter.

Exemplets funktion f har derivatan

$$f'(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{16}{15}x - \frac{22}{15}.$$

Vi bildar därför ekvationen

$$f'(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{16}{15}x - \frac{22}{15} = 0,$$

som har lösningarna

$$\begin{cases} x_5 = -1 \\ x_6 = \dfrac{11}{3} \approx 3,7. \end{cases}$$

2.4 Påbörja teckentabell

Vi bildar nu en tabell som vi successivt skall fylla med mer och mer information om f.

Eftersom f' i detta exempel svarar mot ett polynom av grad två som har ett minimum (tecknet för termen med x^2 är positivt), kan vi notera tecknet för f' på ömse sidor om x_5 och x_6. Även detta införs i tabellen.

Att derivatan är positiv respektive negativ betyder att f växer respektive avtar. Detta markeras med symbolerna $\nearrow$ respektive $\searrow$ i tabellen.

x		x_1 $= -3$		x_5 $= -1$		x_4 $= 0$				x_2 $= 2$		x_6 $\approx 3,7$		x_3 $= 5$	
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	4	$\searrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$
f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f''															

2.5 Extrempunkter

Här beräknar vi koordinaterna för de lokala extrempunkterna. Exemplet ger

$$f(x_5) = 4,8$$

och

$$f(x_6) = -\frac{160}{81} \approx -2,0.$$

Detta införs i tabellen.

x		x_1 $= -3$		x_5 $= -1$		x_4 $= 0$				x_2 $= 2$		x_6 $\approx 3,7$		x_3 $= 5$	
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4,8	$\searrow$	4	$\searrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	$-2,0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$
f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f''															

2.6 Maximum eller minimum

För att kunna bestämma om punkterna svarar mot lokala maxima eller minima bestämmer vi först andraderivatan till f genom att derivera f'. Exemplet ger

$$f''(x) = \frac{4}{5}x - \frac{16}{15}.$$

I x_5 fås värdet

$$f''(x_5) = -\frac{28}{15} \approx -1,9$$

som alltså svara mot ett maximum eftersom det är negativt.

I x_6 fås värdet

$$f(x_6) = \frac{28}{15} \approx 1,9$$

vilket alltså svara mot ett minimum eftersom det är positivt.

Att värdet av andraderivatan i x_5 och x_6 är samma så när som på tecknet är inte en slump utan ett tecken på att vi räknat rätt. (Varför är det så?).

Den nya informationen införs i tabellen.

x		x_1 $= -3$		x_5 $= -1$		x_4 $= 0$				x_2 $= 2$		x_6 $\approx 3,7$		x_3 $= 5$	
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4,8	$\searrow$	4	$\searrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	$-2,0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$
f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f''				$-1,9$								$+1,9$			

Vi skulle naturligtvis kunnat ha sett vad som var maximum och minimum genom att endast titta på pilarna i raden för f. Det är dock bra att notera att man alltså kan bestämma om en extrempunkt är ett maximum eller minimum genom att bara beräkna värdet av andraderivatan i endast den punkt man är intresserad av.

2.7 Inflexionspunkten

Andraderivatan f'' svarar mot en linje, ekvation (17). Eftersom dess värde är negativt för x_5 och positivt för x_6 måste det finnas ett värde mellan dessa där den antar värdet noll. Detta är x-koordinaten för inflexionspunkten, x_I.

Denna kan bestämmas genom att lösa ekvationen

$$f''(x) = 0$$

som har lösningen

$$x_I = \frac{4}{3} \approx 1,3.$$

Vi kan också beräkna y-koordinaten för inflexionspunkten

$$f(x_I) = \frac{572}{405} \approx 1,4.$$

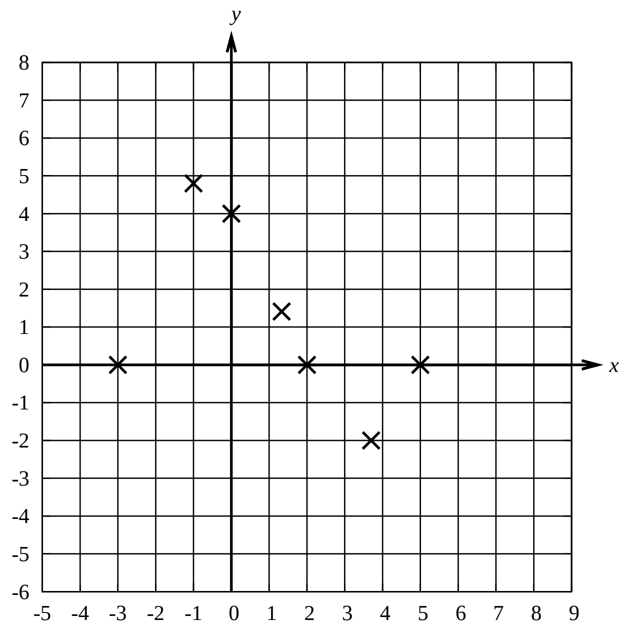
Notera också att detta värde på x också svarar för det största eller (som i detta fall) det minsta värde f' antar. Vi beräknar även detta värde.

$$f'(x_I) = -\frac{98}{45} \approx -2,2.$$

Även detta inför i tabellen, samt tecknet för f'' på ömse sidor om x_I.

x		$x_1 = -3$		$x_5 = -1$		$x_4 = 0$		$x_I \approx 1,3$		$x_2 = 2$		$x_6 \approx 3,7$		$x_3 = 5$	
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4,8	$\searrow$	4	$\searrow$	$\approx 1,4$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-2,0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$
f'	+	+	+	0	−	−	−	$\approx -2,2$	−	−	−	0	+	+	+
f''	−	−	−	$-1,9$	−	−	−	0	+	+	+	$+1,9$	+	+	+

Nu känner vi totalt sju punkter som vi kan pricka in i ett koordinatsystem.



2.8 Ekvation för tangenten i nollställena

Som övning, och som hjälp att rita grafen till f senare, tar vi nu fram ekvationen för tangenten till f i dess nollställen. Detta kan göras på två sätt. Det mest självklara är att använda derivatan för att beräkna tangentens riktningskoefficient.

Det andra sättet är att bara ta hänsyn till den faktor varierar mest kring respektive nollställe.

Att göra detta på två sätt ger en möjlighet till jämförelse, uttrycken skall ju bli lika, och därmed en extra felkontroll.

2.8.1 Med derivata

Låt tangenterna i de tre nollställena ha ekvationerna

$$
\begin{aligned}
y_1^T &= k_1 x + m_1, \\
y_2^T &= k_2 x + m_2, \\
y_3^T &= k_3 x + m_3.
\end{aligned}
$$

Tangenternas riktringskoefficienter har de värde f' antar i de tre nollställena. Därför gäller

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f'(x_1) = \frac{16}{3}, \\
k_2 &= f'(x_2) = -2, \\
k_3 &= f'(x_3) = \frac{16}{5},
\end{aligned}
$$

För att bestämma m_1, m_2 och m_3 nyttjas att tangenterna går genom punkterna $(-3, 0)$, $(2, 0)$ samt $(5, 0)$. Ekvationerna och dess lösningar blir

$$
\begin{array}{lcl}
0 = k_1 x_1 + m_1 & \Leftrightarrow & m_1 = -k_1 x_1 = 16, \\
0 = k_2 x_2 + m_2 & \Leftrightarrow & m_2 = -k_2 x_2 = 4, \\
0 = k_3 x_3 + m_3 & \Leftrightarrow & m_3 = -k_3 x_3 = -16.
\end{array}
$$

Slutligen fås alltså att

$$
\begin{aligned}
y_1^T &= \frac{16}{3} x + 16, \\
y_2^T &= -2x + 4, \\
y_3^T &= \frac{16}{5} x - 16.
\end{aligned}
$$

2.8.2 Ur faktorformen

Den faktor som varierar mest kring ett nollställe är den faktor som blir noll i nollstället. Därför får vi en linjär uppskattning av f kring $x = x_1$ om vi byter ut x mot x_1 i de två faktorer som inte är noll för $x = x_1$.

På samma sätt kring de två andra nollställena.

Om faktorn som blir noll i det aktuella nollstället har multiplicitet ett resulterar detta utbyte i ekvationen för tangenten till f i nollstället. Detta kan bevisas.

Vi får

$$\begin{aligned}
f_{\text{Runt } x=x_1}(x) &= \frac{2}{15}(x-x_1)(x_1-x_2)(x_1-x_3) = \\
&= \frac{2}{15}(x-(-3))(-3-2)(-3-5) \\
&= \frac{2}{15}(x+3)(-5)(-8) = \frac{16}{3}x+16 \quad \equiv y_1^T, \\
f_{\text{Runt } x=x_2}(x) &= \frac{2}{15}(x_2-x_1)(x-x_2)(x_2-x_3) = \\
&= \frac{2}{15}(2-(-3))(x-2)(2-5) \\
&= \frac{2}{15}\cdot 5(x-2)(-3) = -2x+4 \quad \equiv y_2^T, \\
f_{\text{Runt } x=x_3}(x) &= \frac{2}{15}(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x-x_3) = \\
&= \frac{2}{15}(5-(-3))(5-2)(x-5) \\
&= \frac{2}{15}\cdot 8\cdot 3(x-5) = \frac{16}{5}x-16 \quad \equiv y_3^T.
\end{aligned}$$

2.9 Tangenten i inflexionspunkten

Som extra stöd för att senare rita grafen kan vi även bestämma ekvationen för tangenten till f i inflexionspunkten.

Låt den vara $y_I = k_I x + m_I$. Vi bestämmer k_I med

$$k_I = f'(x_I) = -\frac{98}{45} \approx -2,2$$

och bestämmer därefter m_I genom att lösa ekvationen

$$y_I(x_I) = k_I x_I + m_I \quad \Leftrightarrow \quad m_I = y_I(x_I) - k_I x_I = \tfrac{1748}{405} \approx 4,3.$$

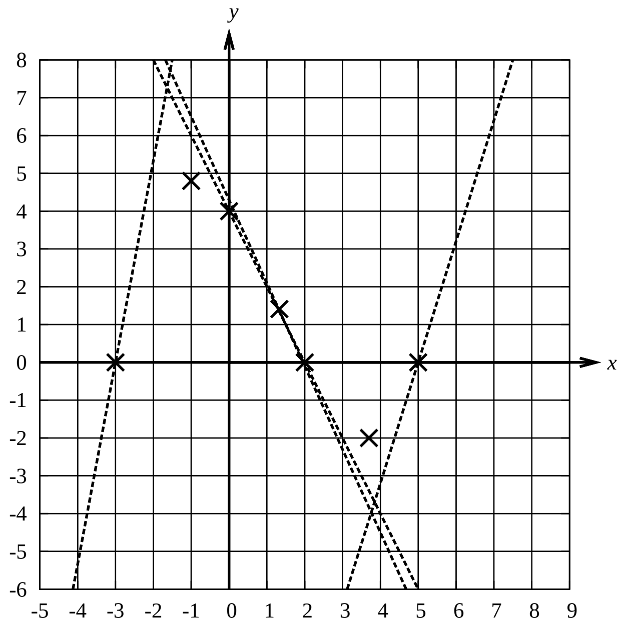
Även denna linje ritas i koordinatsystemet.

2.10 Grafen

Om man vill ha extra stöd för att rita grafen, får man beräkna värdet på f i fler än dessa sju punkter. Detta utelämnas dock här.

3 Några specialfall

I exemplet ovan valdes tre olika nollställen. Ett polynom av grad tre måste dock inte ha tre nollställen. Nedan följer en diskussion om vad som händer i de olika fall som finns.

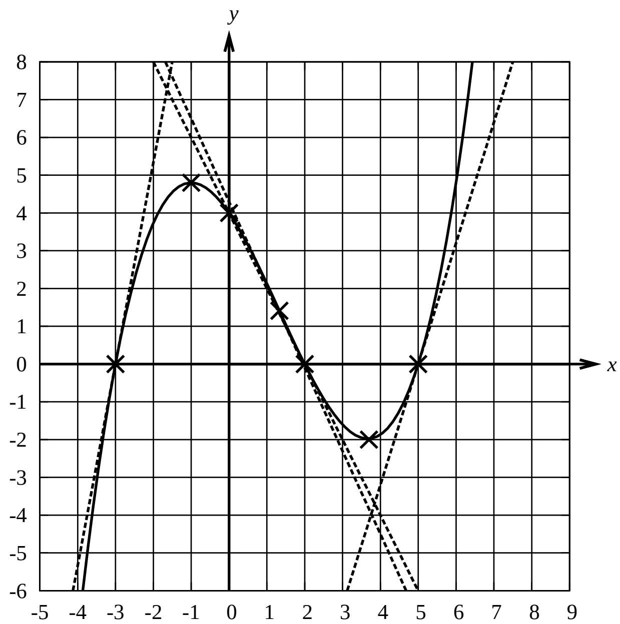


3.1 En faktor av multiplicitet två

Om man väljer två av nollställena att vara lika, kommer detta att resultera i två lika faktorer. Det mest naturliga är då att betrakta dem som en faktor av multiplicitet två, men om man ändå håller isär dem kan man genomföra alla moment i övningen precis som ovan.

Då kommer man att finna att tangenterna i de två lika nollställena kommer att sammanfalla med x-axeln, vilket kanske inte är så intressant.

Intressantare är att istället approximera f med en parabel, istället för en linje. Detta kan också göras på två sätt, precis som när vi bestämde ekvationen för tangenten.



Låt oss studera ett exempel där

$$\begin{aligned} x_1 &= -3 \\ x_2 = x_3 \equiv x_{2,3} &= 4 \end{aligned}$$

och den fjärde punkten precis som ovan vald till $(x_4, y_4) = (0, 4)$.

Ansätt nu

$$f(x) = k(x - x_1)(x - x_{2,3})^2.$$

Konstanten k bestäms precis som förut och vi får i detta exempel

$$f(x) = \frac{1}{12}(x+3)(x-4)^2 = \frac{1}{12}x^3 - \frac{5}{12}x^2 - \frac{2}{3}x + 4.$$

Allt som har med nollstället vid $x_1 = -3$ och infexionspunkten, som nu är $x_I = 5/3$, hanteras precis som i förra exemplet.

Första och andra derivatan till f ges av

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{2}{3}$$

och

$$f''(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{6}.$$

3.1.1 Med derivata

Eftersom f i detta fall kommer att ha ett lokalt minimum på x-axeln är dess derivata noll i detta minimum. Däremot kan man ansätta ett polynom av grad två som approximerar f vid detta nollställe enligt

$$y_P = a(x - x_{2,3})^2 = a(x^2 - 2 \cdot x \cdot x_{2,3} + x_{2,3}^2)$$

där a är en konstant. Detta blir naturligtvis en parabel, därav indexet P. Övertyga dig om att $y'_P(x_{2,3}) = 0$!

Konstanten a bestäms nu så att y_P får samma andraderivata som f i $x_{2,3}$.

För att göra detta måste y_P deriveras två gånger. Vi får

$$y'_P(x) = 2ax - 2ax_{2,3}$$

och

$$y''_P(x) = 2a.$$

Andraderivatan för exemplets f ger oss ekvationen och lösningen

$$f''(x_{2,3}) = f''(4) = \frac{7}{6} = 2a \Rightarrow a = \frac{7}{12}.$$

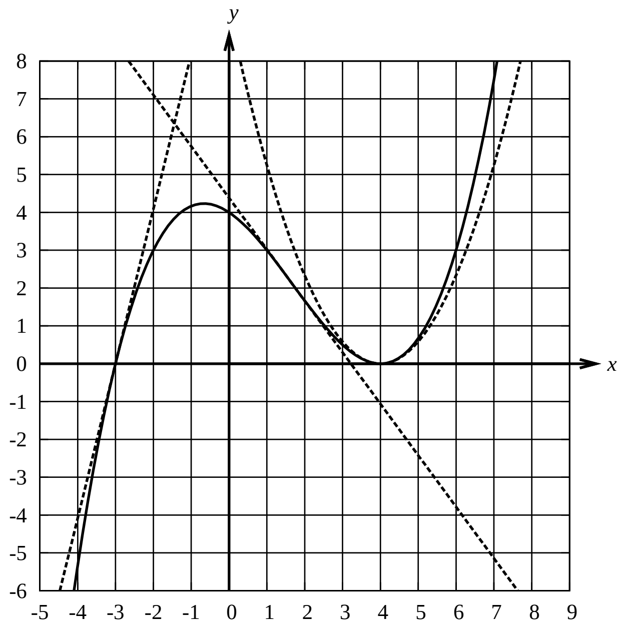
3.1.2 Ur faktoriseringen

Precis som i förra exemplet kan vi nu bilda en approximation till f genom byta ut x mot $x_{2,3}$ i den faktor som inte är noll i $x = x_{2,3}$. Man kan visa att detta ger precis y_P.

Vi får här

$$
\begin{aligned}
f_{\text{Runt } x=x_{2,3}}(x) = & \frac{1}{12}(x_{2,3} - x_1)(x - x_{2,3})^2 = \\
= & \frac{1}{12}(4+3)(x-4)^2 \equiv y_P.
\end{aligned}
$$

Figuren nedan visar f, dess tangenter i x_1 och x_I samt y_P.



3.2 En faktor av multiplicitet tre

Om alla tre nollställen väljes lika, $x_1 = x_2 = x_3 = x_{1,2,3}$, fås en faktor av multiplicitet tre. I detta fall fås alla tre tangenter att sammanfalla med x-axlen.

Vi får heller inget intressant ur metoden att byta ut x mot något i faktorn, eftersom det bara finns en faktor.

Som exempel väljes $x_{1,2,3} = 4$ och vi ansätter

$$f(x) = k(x - x_{1,2,3})^3.$$

Den fjärde punkten väljes åter till $(x_4, y_4) = (0, 4)$ vilket ger

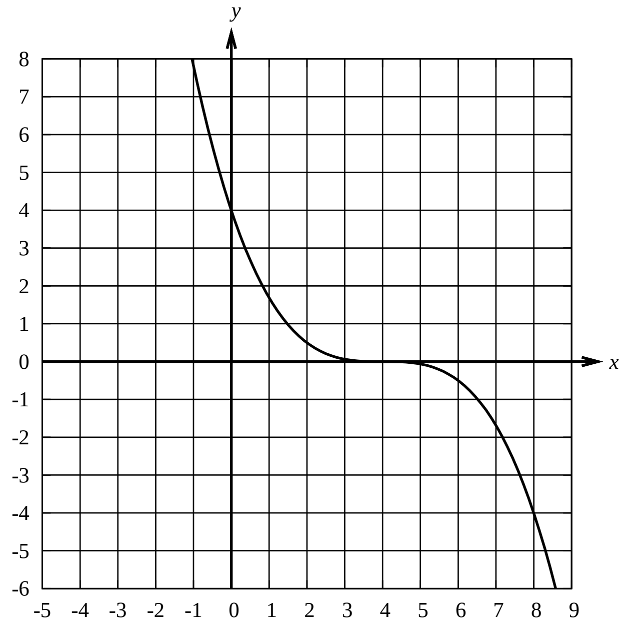
$$k = -\frac{1}{16}.$$

Funktionen f blir då

$$f(x) = -\frac{1}{16}(x-4)^3.$$

För infexionspunkten gäller $x_I = x_{1,2,3}$ och tangenten till f i x_I sammanfaller även den med x-axlen.

Grafen till f i detta exempel återges nedan.



3.3 En irreducibel faktor

Det sista specialfallet som är roligt att studera är när det finns en faktor av grad två som är irreducibel. Då kommer det bara att finnas ett nollställe x_1.

Det finns faktiskt två fall som är intressanta att studera var för sig. För båda exemplen låter det enda nollstället vara $x_1 = -3$ och den fjärde punkten vara $(x_4, y_4) = (0, 4)$.

3.3.1 Ett lokalt minimum

I detta fall kan vi ansätta och exemplifiera med

$$f(x) = k(x - x_1)(x^2 + \alpha x + \beta) = \frac{2}{33}(x + 3)(x^2 - 8x + 22)$$

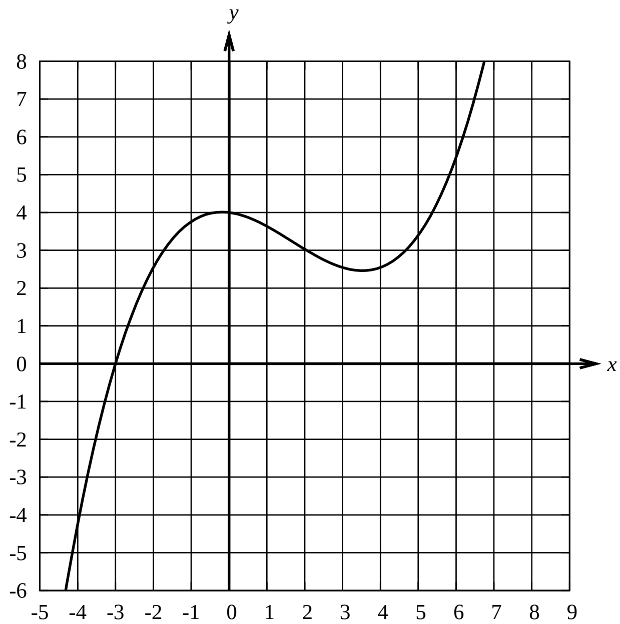
där den sista faktorn alltså är irreducibel. Ett irreducibelt polynom av grad två kan dock alltid kvadratkompletteras. Då fås

$$f(x) = k(x - x_1)((x - x_S)^2 + b) = \frac{2}{33}(x + 3)((x - 4)^2 + 6).$$

Observera att x_S (i exemplet $x_S = 4$) inte är ett nollställe till f. Inte heller har f en lokal extrempunkt i x_S eftersom det finns en faktor till i f som beror av x.

Om man vill approximera f kring sitt lokala maximum, där $x = x_M \approx 3,5$, kan man använda metoden som går ut på att bilda ett polynom som har samma andraderivata som f i x_M.

Däremot kan man inte använda och metoden som går ut på att byta ut x mot x_M i faktorn av grad ett. Anledningen till detta är just att $x_M \neq x_S$. Notera detta i grafen nedan.



3.3.2 En terasspunkt

Om det irreducibla polynomet har formen $x^2 + x_1 \cdot x + x_1^2$ kommer f att kunna skrivas på formen

$$f(x) = k(x - x_1)(x^2 + x_1 \cdot x + x_1^2) = k(x^3 + x_1^3) = \frac{4}{27}(x^3 - (-3)^3).$$

Då kommer f att ha en terrasspunkt för $x = 0$.

3.4 Fler fall

Det finns några fall till vi skulle kunna studera. Till exempel skulle vi kunna utreda hur x_S och b skall väljas för att f skall få en terrasspunkt för något annat värde på x än noll.

Vidare kan man konstruera polynom av grad tre som inte har någon stationär punkt. Detta lämnas som övning.

4 Script för Maxima

```
/* Script för att generera exempel till "Teraövningen"
   i det fall funktionen saknar irreducibel faktor
   av grad två eller tre.   */

kill(all);

/* Nollställen och den fjärde punkten */

x1:-3;
x2:2;
x3:5;
x4:0;  y4:4;

/* Funktionen */

f:k*(x-x1)*(x-x2)*(x-x3);

/* Bestäm k */

L1:solve(ev(f,x=x4)=y4,k);
k:rhs(L1[1]);

/* Byt ut k i f mot det nu bestämda värdet */

f:f,k=k;

/* f på polynomform */

expand(f);

/* Även om Maxima förmodligen räknar rätt
   kollas även här att vi får rätt värden. */

f,x=x1;   f,x=x2;   f,x=x3;   f,x=x4;

/* Derivera f */

fp:diff(f,x);

/* När är derivatan noll? */

L2:solve(fp=0,x);
x6:rhs(L2[1]);

/* Om f har en trippelrot finns inte två
   olika rötter till fp=0.
   För att scriptet skall bli bra måste x5 sättas
   till x6. (Maxima ger den största roten först.) */

if x1=x2 then
    x5:x6
else
    x5:rhs(L2[1])
;


/* Andraderivatan */

fb:diff(f,x,2);

/* Beräkna andraderivatans värde i nollställena till fp.
   Här krävs ett litet hack för att få Maxima att svara med
   ett tal. */

fb,x=x5, numer;    %,numer;
fb,x=x6, numer;    %,numer;


/* Bestämma inflexionspunkten samt värdet på f där */

L3:solve(fb=0,x);
xI:rhs(L3[1]);
f,x=xI;
```

```
/* Tangenterna ur derivatan */

k1:fp,x=x1;    k2:fp,x=x2;    k3:fp,x=x3;
m1:-k1*x1;     m2:-k2*x2;     m3:-k3*x3;
m1,numer;      m2,numer;      m3,numer;
yT1:k1*x+m1;   yT2:k2*x+m2;   yT

yt1:k*(x -x1)*(x1-x2)*(x1-x3);
yt2:k*(x2-x1)*(x -x2)*(x2-x3);
yt3:k*(x3-x1)*(x3-x2)*(x -x3);

expand(yt1);   expand(yt2);   expand(yt3);


/* Tangenten i infexionspunkten */

kI:fp,x=xI;    %,numer;

L4:solve(ev(f,x=xI)=kI*xI+mI,mI);
mI:rhs(L4[1]); %,numer;

yI:kI*x+mI;

/* Approximation med parabel om x2=x3 */

a:ev(fb,x=x2)/2;
yP:a*(x-x2)^2;

/* Rita olika mycket beroende på om x2=x3 eller inte */

if x1=x2 AND x1=x3  then
    plot2d([f],[x,-5,9],[y,-9,9],
    [GNUPLOT_PREAMBLE,"set xzeroaxis;set yzeroaxis"])
else if x2=x3 OR x1=x2 then
    plot2d([f,yT1,yI,yP],[x,-5,9],[y,-9,9],
    [GNUPLOT_PREAMBLE,"set xzeroaxis;set yzeroaxis"])
else
    plot2d([f,yT1,yT2,yT3,yI],[x,-5,9],[y,-9,9],
    [GNUPLOT_PREAMBLE,"set xzeroaxis;set yzeroaxis"])
;
```