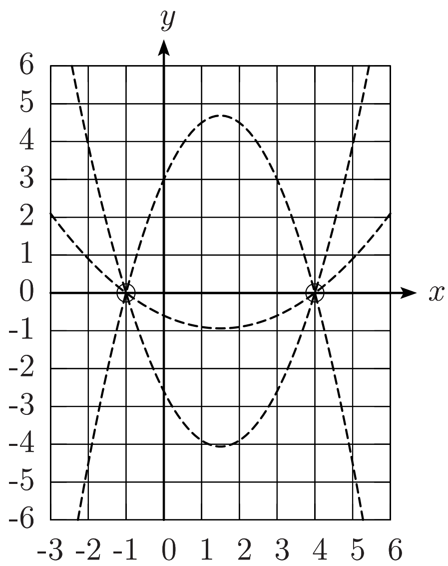


Polynom av grad två

Johan Wild

johan.wild@europaskolan.se

4 mars 2011

Innehåll

1 Inledning

Polynom är matematiska objekt på vilken en algebraisk struktur är definierad. Det är samma algebraiska struktur som den för de hela talen. De utgör med anrdra ord en ring. Polynom kan ibland faktoriseras.

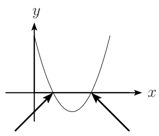
Polynom kan även användas för att definiera funktioner och ekvationer, vilka då kallas polynomfunktioner och polynomekvationer. Funktioner har ibland nollställen och ekvationer kan ibland lösas.

Denna text syftar till att väva ihop begreppen *faktor i ett polynom*, *nollställe för en polynomfunktion* och *roten till en polynomekvation*. Du skall se att de är olika sidor av samma mynt.

Ett kvadratiskt nollställe till funktionen motsvarar att en faktor har multiplicitet två i polynomets faktorisering och ekvationen kommer att ha en dubbelrot.

När ett polynom inte går att faktorisera är det irreducibelt. Det visar sig i grafen på så sätt att det då inte finns nollställen, och ekvationen kommer att sakna lösning.

Tabellen nedan sammanfattar detta.

Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$	**Ekvation** $ax^2 + bx + c = 0$	**Polynom** $ax^2 + bx + c$
Hitta nollställen 	Lös ekvationen $\begin{cases} x_1 = \ldots \\ x_2 = \ldots \end{cases}$	Faktorisera $k(x - x_1)(x - x_2)$
Kvadratiskt nollställe	Dubbelrot	Multiplicitet två
Inget nollställe	Lösning saknas	Irreducibelt polynom

Texten syftar även till att i detalj utreda den geometriska innebörden av de olika konstanter som används för att uttrycka polynom på olika former.

2 Polynom av grad två

2.1 Egenskaper hos grafen

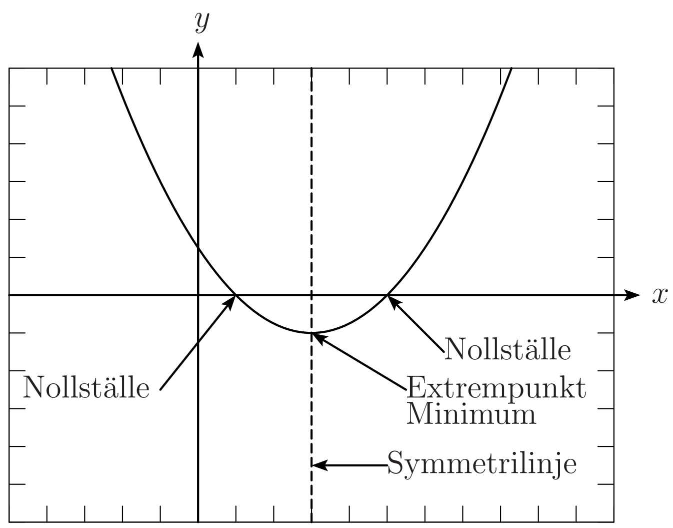
2.1.1 Allmänt

En funktion som ges av ett polynom av grad två, en andragradsfunktion, kan skrivas på lite olika sätt:

$$f(x) = \underbrace{ax^2 + bx + c}_{\text{Polynomform}} = \underbrace{\pm\left(\alpha\left(x - x_0\right)\right)^2 + \beta}_{\text{Kvadratkompletterad form}} = \underbrace{k\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)}_{\text{Faktorform}}. \quad (2.1)$$

Konstanterna a, b och c samt α, β och x_0 samt k, x_1 och x_2 har alla viss geometrisk innebörd. Syftet med detta avsnitt är att utreda dessa. När vi utreder detta kommer vi på köpet lära oss lösa andragradsekvationer, ekvationer på formen

$$ax^2 + bx + c = 0.$$



Grafen till en andragradsfunktion kallas *parabel*. Figuren ovan visar ett exempel. De egenskaper grafen har är att den har två nollställen, den har en extrempunkt som i detta fall är ett minimum (annars heter det maximum) samt att den är spegelsymmetrisk i en linje som följaktligen kallas grafens symmetrilinje.

Det går en och endast en linje genom två givna punkter. Det finns också två konstanter i uttrycket för en linje, till exempel k och m.

Varje uttryck för en andragradsfunktion har tre konstanter som specificerar funktionen. Det krävs även tre punkter för att definiera en parabel.

Man kan snabbt skissa grafen till en andragradsfunktion om man kan besvara följande frågor.

- Vilken är grafens symmetrilinje?
- Har funktionen ett minimum eller maximum?
- Vilket är funktionens minsta eller största värde?
- Finns det nollställen?
- Vilka är funktionens nollställen (om det finns några)?

Vi skall nu se hur dessa kan identifieras ur konstanterna i respektive form i (2.1). Därefter skall vi se hur man algebraiskt kan omvandla funktionen mellan de olika formerna. Syftet med detta är att du skall se en graf framför dig då du jobbar med motsvarande algebraiska uttryck. Då får du förhoppningsvis lättare att jobba med algebran.

På motsvarande sätt är det meningen att du för din inre syn skall se ett algebraiskt uttryck då du ser en graf. Du har övat tillräckligt då dessa har smält samman till en enhet och du känner dig lika bekväm med båda formerna och kan hoppa mellan dem. När detta är uppnått får du ännu ett exempel på den fantastiska skönhet matematiken erbjuder!

2.1.2 Polynomform

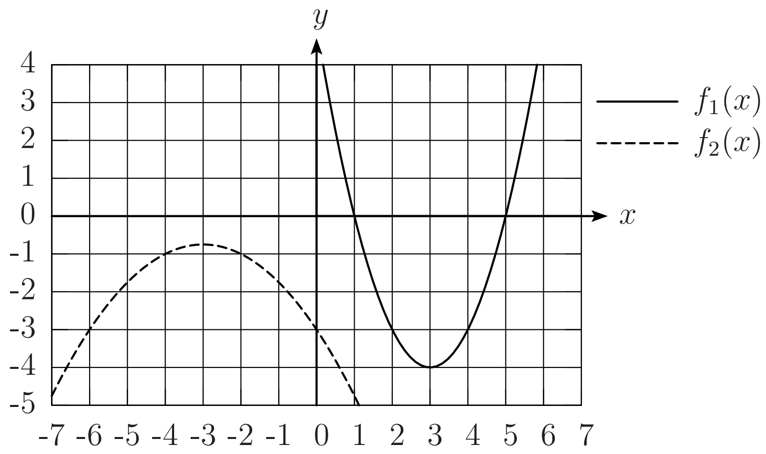
Två exempel på andragradsfunktioner skrivna på polynomform ges av

$$f_1(x) = x^2 - 6x + 5 \tag{2.2}$$

och

$$f_2(x) = -\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} - \frac{13}{4}. \tag{2.3}$$

Graferna visas i figuren nedan



Vi ser att f_1 har symmetrilinje i $x = 3$, ett minimum, antar minsta värdet $f_1(3) = -4$ och två nollställen i $x = 1$ respektive $x = 5$.

Funktionen f_2 har symmetrilinje i $x = -3$, ett maximum och antar största värdet $f_2(-3) = -1$. Några nollställen finns inte.

Det är generellt svårt att uttala sig om grafen till en funktion given på polynomform. I den mån det går kan det sammanfattas i en enda punkt:

- Om $a > 0$ i (2.1 kommer grafen att ha ett minimum och om $a < 0$ kommer grafen att ha ett maximum.

2.1.3 Kvadratkompletterad form

Bilden nedan visar sju exempel på grafer till andragradsfunktioner där funktionerna dessutom är skrivna på kvadratkompletterad form.

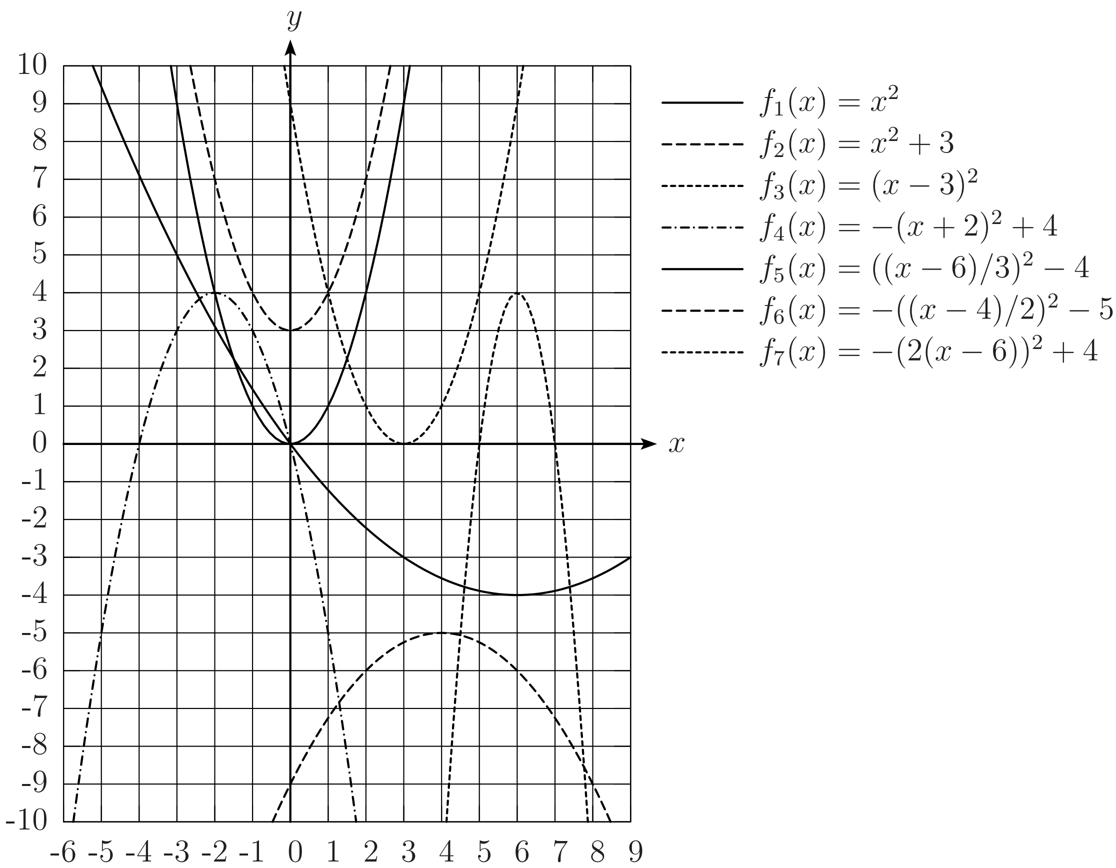
Den geometriska betydelsen av α, β och x_0 i uttrycket

$$f(x) = \pm (\alpha (x - x_0))^2 + \beta$$

kan sammanfattas till:

- Är det ett plus före kvadraten får grafen ett minimum, är det ett minus blir det ett maximum.

- Grafen antar sitt största eller minsta värde vid x_0. Symmetrilinjen har ekvationen $x = x_0$.



- Funktionsvärdet vid $x = x_0$ är β: $f(x_0) = \beta$
- Hur "skålformad", eller "spetsig", grafen är beror av α. Ju större α är desto spetsigare blir grafen.

Övertyga dig om att du tror på dessa punkter genom att jämföra graferna i figuren nedan med respektive algebraiska uttryck.

Lär dig även rita grafen till en funktion given på kvadratkompletterad form, förutsatt att du får värden på α, β och x_0.

2.1.4 Faktorform

En andragradsfunktion ges som sagt av ett polynom av grad två:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Sedan tidigare vet du att det finns polynom av grad två som inte går att faktorisera, irreducibla polynom. Låt oss därför först anta att vi kan faktorisera polynomet. Den mest generella formen blir då en produkt av två faktorer av grad ett och en av grad noll (en konstant):

$$f(x) = k(x - x_1)(x - x_2).$$

Om vi sätter in x_1 och x_2 i detta uttryck får vi

$$f(x_1) = k\underbrace{(x_1 - x_1)}_{=0}(x_1 - x_2) = 0$$

och

$$f(x_2) = k(x_2 - x_1)\underbrace{(x_2 - x_2)}_{=0} = 0.$$

Vi ser att x_1 och x_2 är nollställen till f. Detta byggde på att vi kunde faktorisera f, vilket inte är säkert.

Vi noterar följande.

- Om grafen till en andragradsfunktion inte har några nollställen är inte motsvarande polynom möjligt att faktorisera.
- Om grafen till en andragradsfunktion har nollställen, kan två faktorer till motsvarande polynom direkt avläsas i grafen.

Exempel 2.1.1. Funktionen f_1 definierad i (2.2) går alltså att faktorisera. Två faktorer är $x - 1$ och $x - 5$ eftersom grafen har nollställen i $x = 1$ och $x = 5$:

$$f_1(x) = x^2 - 6x + 5 = k(x-1)(x-5).$$

För att bestämma k måste vi ta hjälp av en punkt till, till exempel syns det att

$$f_1(3) = -4$$

så vi kan bilda ekvationen

$$k(3-1)(3-5) = -4$$

som har lösningen $k = 1$. Faktoriseringen av f_1 är alltså

$$f_1(x) = x^2 - 6x + 5 = 1(x-1)(x-5).$$

▲

Exempel 2.1.2. Eftersom grafen till f_2 definierad i (2.3) inte har några nollställen drar vi slutsatsen att polynomet

$$-\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} - \frac{13}{4}$$

är irreducibelt. Detsamma gäller f_2 och f_6 i figuren i avsnitt 2.1.3. ▲

2.2 Algebraisk lösning av andragradsekvationer

2.2.1 Inledning och enkla fall

Detta avsnitt handlar om hur vi genom algebraiska operationer kan lösa andragradsekvationer. Människan har tidigt kunnat lösa dessa, däremot har lösningarna då konstruerats med passare och linjal. För grekerna och araberna saknade ekvationen

$$x^2 + 2x - 4 = 0 \tag{2.4}$$

helt mening. De räknade inte med talet noll på det sätt vi gör idag. Alla variabler och koefficienter tolkades alltid som sträckor, areor eller volymer. För dem skulle därför ekvationen

$$x^2 + 2x = 4$$

ha en naturlig tolkning: Finn en sträcka så att arean av en kvadrat med denna sträcka som sida, tillsammans med arean för en rektangel vars bas är den sökta sträckan och vars höjd är två längdenheter, är fyra areaenheter.

Om du jämför denna mening med (2.4), hoppas jag att du håller med om att matematikens symbolspråk och tillhörande algebra verkligen har gjort livet lättare!

Låt oss återvända till nutiden. Per definition är $\sqrt{a}$ det (positiva) tal vars kvadrat är a. Därför har ekvationen

$$x^2 = a \qquad a \geq 0 \tag{2.5}$$

en lösning

$$x_1 = \sqrt{a}$$

Däremot måste vi komma ihåg att även

$$(-\sqrt{a}) \cdot (-\sqrt{a}) = a$$

så (2.5) har en lösning till,

$$x_2 = -\sqrt{a}.$$

Om $a < 0$ existerar inte $\sqrt{a}$ vilket medför att (2.5) saknar lösning (därav kravet $a \geq 0$).

Om $a = 0$ finns bara en lösning, $x = 0$.

Exempel 2.2.1. Ekvationen $x^2 = 4$ har lösningarna $x_1 = 2$ och $x_2 = -2$.
▲

Detta var det enklaste fallet. Det näst enklaste är det fall där det saknas en konstant term, ekvationer på formen

$$ax^2 + bx = 0.$$

Dessa ekvationer kan faktoriseras utan problem genom att bryta ut ett ax ur vänsterledet. Vi får

$$ax\left(x + \frac{b}{a}\right) = 0.$$

Ekvationen ovan skall tolkas som att produkten av talen a, x eller $x+b/a$ skall vara noll. Då måste något av talen vara noll. Talet a är uppenbart inte noll. Därför måste antingen $x = 0$ gälla, vilket ger den första lösningen

$$x_1 = 0,$$

eller så måste $x + b/a$ vara noll vilket ger en lösning till:

$$x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Exempel 2.2.2. Ekvationen

$$2x^2 - 10x = 0$$

skriv om till

$$2x\left(x-5\right) = 0$$

och lösningarna identifieras till

$$x_1 = 0$$

och

$$x_2 = 5.$$

▲

2.3 Kvadratkomplettering

Att kvadratkomplettera ett polynom av grad två innebär att man till polynomet både lägger till något och drar ifrån samma sak (så att ingenting egentligen förändras) med syfte att man kan identifiera en jämn kvadrat av tre av termerna.

Exempel 2.3.1. Skriv polynomet

$$x^2 + 6x + 7$$

på kvadratkompletterad form.

En jämförelse term för term med kvadreringsregeln

$$a^2 + 2ab + b^2 = \left(a+b\right)^2$$

ger:

- Första termen, x^2, är redan något, x, i kvadrat. Därför identifieras $a = 1$.
- Andra termen ska innehålla en faktor 2 och det som var i kvadrat i första termen. Därför skrivs andra termen om:

  $$6x = 2 \cdot x \cdot 3.$$

  Den faktor som blir kvar måste vara b: $b = 3$.
- Eftersom $7 \neq b^2 = 9$ är inte vårt polynom en jämn kvadrat. Därför lägger vi till och drar ifrån $b^2 = 3^2$ och får

  $$x^2 + 6x + 3^2 - 3^2 + 7.$$
- De tre första termerna är nu en jämn kvadrat:

  $$x^2 + 6x + 3^2 - 3^2 + 7 = \left(x+3\right)^2 - 3^2 + 7.$$

- En sista förenkling ger:

$$x^2 + 6x + 7 = (x+3)^2 - 2.$$

Vi ser att $x^2 + 6x + 7$ antar sitt minsta värde -2 då $x = -3$.

▲

Exempel 2.3.2. Kvadratkomplettera polynomet $4x^2 - 20x + 10$. En jämförelse term för term med kvadreringsregeln

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

ger:

- Första termen är en jämn kvadrat: $4x^2 = (2x)^2$. Vi identifierar $a = 2x$.

- Den andra termen ska innehålla en faktor 2 och det som var i kvadrat i första termen. Därför skrivs andra termen om:

$$-20x = 2 \cdot 2x \cdot (-5)\,.$$

Vi ser här att $b = -5$. Eftersom $10 \neq b^2 = 25$ är inte vårt polynom en jämn kvadrat. Därför lägger vi till och drar ifrån $b^2 = (-5)^2 = 25$ och får $4x^2 - 20x + 25 - 25 + 10$.

- De tre första termerna är nu en jämn kvadrat:

$$4x^2 - 20x + 25 - 25 + 10 = (2x-5)^2 - 25 + 10$$

- En sista förenkling ger:

$$4x^2 - 20x + 10 = (2x-5)^2 - 15.$$

Observera att det sista uttrycket inte exakt motsvarar det som definierades som kavdratkompletterad form i (2.1). För att det skall bli det måste vi bryta ut en faktor 2 inuti parentesen. Gör vi det får vi till sist

$$4x^2 - 20x + 10 = \left(2\left(x - \frac{5}{2}\right)\right)^2 - 15.$$

Detta polynom antar alltså sitt minsta värde -15 då $x = \frac{5}{2}$ ▲

Exempel 2.3.3. Kvadratkomplettera polynomet $9x^2 + 5x + 8$.

En jämförelse term för term med kvadreringsregeln

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

ger:

- Första termen är en jämn kvadrat $9x^2 = (3x)^2$, vi får därför $a = 3x$.

- Den andra termen ska innehålla en faktor 2 och det som var i kvadrat i första termen. Den resterande faktorns nämnare används för att korrigera för det som måste dit för att kravet skall uppfyllas. Därför skrivs andra termen om enligt

$$5x = 2 \cdot 3x \cdot \frac{5}{2 \cdot 3} = 2 \cdot 3x \cdot \frac{5}{6}$$

  vilket ger $b = 5/6$. Eftersom $8 \neq b^2 = (5/6)^2$ är inte vårt polynom en jämn kvadrat. Därför lägger vi till och drar ifrån $b^2 = (5/6)^2$ och får

$$9x^2 + 5x + 8 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5/6 + (5/6)^2 - (5/6)^2 + 8.$$

- De tre första termerna är nu en jämn kvadrat:

$$9x^2 + 5x + 8 = (3x + 5/6)^2 - (5/6)^2 + 8.$$

- En sista förenkling ger:

$$9x^2 + 5x + 8 = (3x + 5/6)^2 + 7\frac{9}{36}.$$

Observera att det sista uttrycket inte exakt motsvarar det som definierades som kavdratkompletterad form i (2.1). För att det skall bli det måste vi bryta ut en faktor 3 inuti parentesen. Gör vi det får vi till sist

$$9x^2 + 5x + 8 = (3\,(x + 5/18))^2 + 7\frac{9}{36}.$$

Vi inser här att $9x^2 + 5x + 8$ antar sitt minsta värde

$$7\frac{9}{36}$$

då

$$x = -5/18.$$

Eftersom det minsta värdet är positivt och saknar ekvationen

$$9x^2 + 5x + 8 = 0$$

lösning. ▲

Exempel 2.3.4. Kvadratkomplettera polynomet $3x^2 - 5x + 2$.

En jämförelse term för term med kvadreringsregeln

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

ger:

- Första termen är inte en jämn kvadrat. Den måste skrivas om enligt

$$3x^2 = \left(\sqrt{3}x\right)^2$$

  vilket ger $a = \sqrt{3}x$.

- Den andra termen ska innehålla en faktor 2 och det som var i kvadrat i första termen. Den resterande faktorns nämnare används för att korrigera för det som måste dit för att kravet skall uppfyllas. Därför skrivs andra termen om enligt

$$-5x = 2 \cdot \sqrt{3}x \cdot \left(-\frac{5}{2 \cdot \sqrt{3}}\right)$$

  vilket ger $b = -\frac{5}{2\sqrt{3}}$.

- Eftersom

$$2 \neq b^2 = \left(-\frac{5}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{25}{4 \cdot 3} = \frac{25}{12}$$

  är inte vårt polynom en jämn kvadrat. Därför lägger vi till och drar ifrån

$$b^2 = 25/12$$

  och får

$$3x^2 - 5x + 2 = \left(\sqrt{3}x\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{3}x \cdot \left(-\frac{5}{2 \cdot \sqrt{3}}\right) + \frac{25}{12} - \frac{25}{12} + 2.$$

- De tre första termerna är nu en jämn kvadrat:

$$3x^2 - 5x + 2 = \left(\sqrt{3}x - \frac{5}{2\sqrt{3}}\right)^2 - 25/12 + 2.$$

- En sista förenkling ger:

$$3x^2 - 5x + 2 = \left(\sqrt{3}x - \frac{5}{2\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{1}{12}.$$

Observera att det sista uttrycket inte exakt motsvarar det som definierades som kavdratkompletterad form i (2.1). För att det skall bli det måste vi bryta ut en faktor $\sqrt{3}$ inuti parentesen. Gör vi det får vi till sist

$$3x^2 - 5x + 2 = \left(\sqrt{3}\left(x - \frac{5}{6}\right)\right)^2 - \frac{1}{12}$$

Vi ser att $3x^2 - 5x + 2$ antar sitt minsta värde

$$-1/12$$

då

$$x = 5/6.$$

▲

2.4 En lösningsformel

Nu har vi tillräckligt med verktyg för att kunna lösa andragradsekvationen

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Vi börjar med att dividera båda led med a, så att ekvationen blir på formen

$$x^2 + px + q = 0.$$

Ibland kallas dessa två former abc-form respektive pq-form.

Sats 2.4.1. *Ekvationen*

$$x^2 + px + q = 0$$

har lösningen eller lösningarna

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \tag{2.6}$$

förutsatt att lösningarna existerar.

Uttrycket (2.6) brukar benämnas pq-formeln.

Bevis. Vi börjar med att kvadrakomplettera vänsterledet. Då får vi

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0.$$

De tre första termerna är en jämn kvadrat. Vi får

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0.$$

Nu förekommer den sökta variabeln x bara i en term i vänsterledet. Resterande termer flyttas till högerledet, och vi får

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Vi har nu skrivit om vår ekvation på en form som motsvarar den enklaste formen av andragradsekvation. Lösningarna får genom att dra roten ur båda led.

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Till sist flyttas den andra termen i vänsterledet till högerledet, och vi får

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

□

Exempel 2.4.2. Lös ekvationen

$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Detta motsvarar att finna nollställen till funktionen given i (2.2).

Ekvationen är redan på pq-form. Vi identifierar $p = -6$ och $q = 5$. Enligt (2.6) blir lösningarna

$$x_{1,2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{3^2 - 5} = 3 \pm \sqrt{4} = 3 \pm 2$$

Lösningarna är alltså $x_1 = 1$ och $x_2 = 5$. Jämför med grafen i figuren i avsnitt 2.1.2. Funktionen f_1 i (2.2) kan alltså skrivas

$$f_1(x) = (x - 1)(x - 5).$$

▲

Exempel 2.4.3. Lös ekvationen $2x^2 - 8x + 4 = 0$.

Ekvationen är inte på pq-form. Vi måste först dividera båda led med 2 och får

$$x^2 - 4x + 2.$$

Vi identifierar $p = -4$ och $q = 2$. Enligt (2.6) blir lösningarna

$$x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 2} = 2 \pm \sqrt{2^2 - 2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

vilket ger. $x_1 = 2 + \sqrt{2}$ och $x_2 = 2 - \sqrt{2}$.

Polynomet $x^2 - 4x + 2$ har alltså faktoriseringen

$$\left(x - 2 - \sqrt{2}\right)\left(x - 2 + \sqrt{2}\right).$$

Observera att den ursprungliga ekvationens vänsterled dock har faktoriseringen

$$2\left(x - 2 - \sqrt{2}\right)\left(x - 2 + \sqrt{2}\right)$$

eftersom vi dividerade bort en faktor 2 på vägen. ▲

Följdsats 2.4.4. *Grafen till funktionen $f(x) = x^2 + px + q$ har symmetrilinje $x = -\frac{p}{2}$*

Bevis. I (2.6) syns att funktionens minimum inträffar vid $x = -\frac{p}{2}$, vilket är ekvationen för grafens symmetrilinje. □

Följdsats 2.4.5. *Ekvationen $x^2 + px + q = 0$ saknar lösning om*

$$q > \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

Bevis. Uttrycket under rot-tecknet i (2.6) är negativ om

$$q > \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

Då saknar ekvationen lösningar. Annars ges lösningarna av (2.6). □

2.5 Några specialfall

Ibland stöter man på ekvationer som inte ser ut som andragradsekvationer fast de är det. Det enklaste exemplet är när ekvationen redan är fakroriserad, vilket till exempel gäller för ekvationen

$$(x-2)(x+3)=0$$

När denna ekvation skall lösas finns det naturligtvis ingen anledning att multiplicera ihop faktorerna och tillämpa (2.6) på resultatet. Lösningarna fås direkt genom att betrakta varje faktor som en ekvation av grad ett. I detta fall är lösningarna $x_1 = 2$ och $x_2 = -3$.

Ett annat exempel är ekvationen

$$\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x+3}$$

Denna angrips så att man först konstaterar att $x = 0$ och $x = -3$ ej är tillåtna lösningar eftersom detta skulle innebära en division med noll. Därefter förlänger man respektive sida med lämpliga polynom så att nämnarna blir lika på båda sidor:

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{x+3}{x+3}=\frac{x-1}{x+3}\cdot\frac{x}{x}$$

Denna likhet kan endast vara uppfylld om

$$x+3=(x-1)\,x \quad\Leftrightarrow\quad x^2-2x-3=0$$

Den sista ekvationen har lösningarna $x_1 = -1$ och $x_2 = 2$, vilket är två tillåta lösningar.

3 Grafen och faktorernas multiplicitet

3.1 Linjära nollställen

Då vi studerat ekvationen

$$x^2+px+q=0$$

har vi hittills ej berört det fall där

$$q=\left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Då ger (2.6) att $x_1 = x_2$, vi får alltså endast en rot då benämns benämns *dubbelrot*. Detta kommer av att

$$x^2+px+q$$

då är en jämn kvadrat vars faktorisering är

$$(x-p/2)^2$$

vilken innehåller en faktor som har multiplicitet två. Funktionerna f_1 och f_3 i figuren i avsnitt 2.1.3 är exempel på sådana fall. Det enda nollstället dessa två funktioner har ligger på x-axeln, de har var sitt kvadratiskt nollställe.

Detta kan jämföras med vårt standardexempel f_1 från avsnitt 2.1.2 som vi nu kan skriva på både polynomform och faktorform:

$$f_1(x) = x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$$

Vid respektive nollställe beter sig grafen som en linje. Ekvationen för denna linje kan fås genom att sätta in roten för det aktuella nollstället i den faktor som inte är noll där.

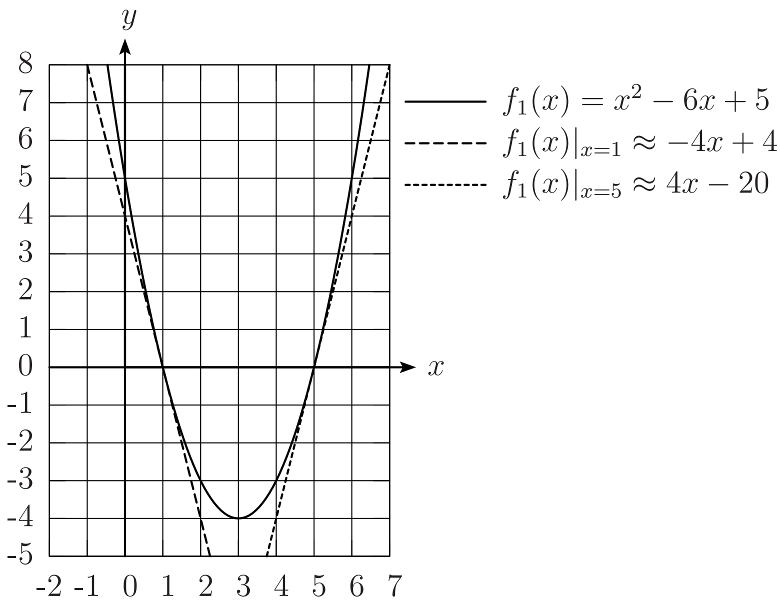
Vid nollstället $x = 1$ sätter vi in $x = 1$ i faktorn $x - 5$ och får

$$f_1(x) \underset{\text{Runt } x=1}{\approx} (x-1)(1-5) = -4x + 4$$

Vid nollstället $x = 5$ sätter vi in $x = 5$ i faktorn $x - 1$ och får

$$f_1(x) \underset{\text{Runt } x=5}{\approx} (5-1)(x-5) = 4x - 20$$

Resultatet visas i figuren nedan.



Nollställen som dessa benämns *linjära nollställen* eftersom funktionen kan approximeras med en linje vid dessa.

Att denna metod fungerar beror på att den faktor som förändras mest kring ett nollställe är den som har att göra med nollstället. Exempelvis förändras faktorn $x - 1$ med 200% mellan $x = 0,9$ och $x = 1,1$ (från $-0,1$ till $0,1$), medan faktorn $x - 5$ bara förändras ca $4,9\,\%$ (från $-4,1$ till $-3,9$).

Därför får man en bra approximation till funktionen om man låter denna faktor vara $1 - 5 = -4$ hela tiden runt $x = 1$.

3.2 Kvadratiska nollställen

För att sätta detta i ett intressantare sammanhang kan vi som exempel studera tredjegradspolynomet

$$h(x) = \frac{1}{5}(x+2)(x-3)^2$$

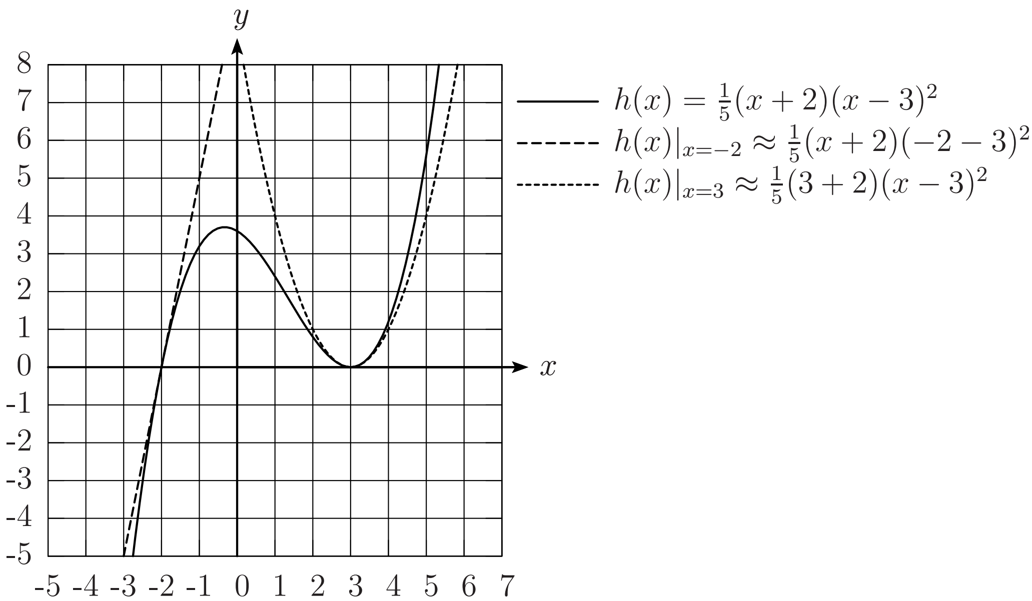
som alltså har en faktor med multiplicitet ett och en med multiplicitet två. De representerar alltså ett linjärt respektive ett *kvadratiskt nollställe*. Grafen till h är avbildad i figuren nedan, där även linjen

$$h(x)|_{x=-2} \approx \frac{1}{5}(x+2)(-2-3)^2$$

och parabeln

$$h(x)|_{x=3} \approx \frac{1}{5}(3+2)(x-3)^2$$

finns med.



4 Megaövningen

4.1 Inledning

Denna övning handlar om en funktion $f(x)$ som är ett polynom av grad två som har två nollställen. Genom att följa instruktionerna nedan kommer du att se hur begreppen nollställen, faktorform och polynomform, kvadratkompletterad form och symmetrilinje hänger ihop med andragradsekvationen och dess lösningar. Dessutom övas algebra och bråkräkning.

Meningen är att du skall känna dig så hemma bland dessa begrepp, så att du skall ”se” ett polynom på faktorform då du tittar på grafen till motsvarande funktion och vice versa.

Övningen är konstruerad så att du fortlöpande kontrollerar om du gjort rätt på olika vis (det är en del av instruktionerna). Därför behövs inget facit.

Du varierar själv övningen genom att göra olika inledande val. Därför kan du utföra övningen flera gånger till dess du ser ett mönster och förstår hur begreppen hänger ihop.

Lycka till!

4.2 Uppgifter

4.2.1 Välj två punkter

Välj två punkter som skall bli funktionens nollställen. Jag väljer -1 och 4.

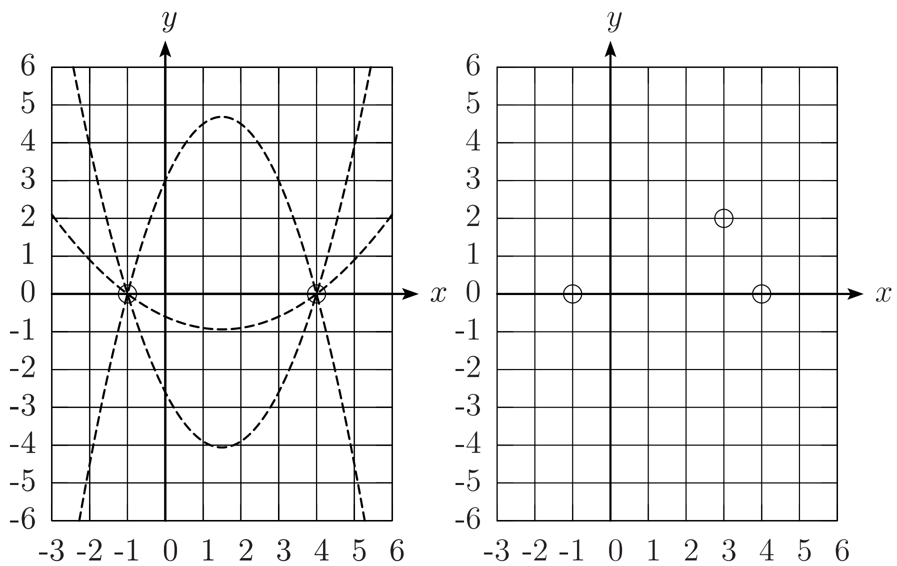
4.2.2 Pricka in dem i koordinatsystem

Pricka in dessa i ett koordinatsystem.

Vi kan nu skriva funktionen f på faktorform eftersom vi vet dess nollställen:

$$f(x) = k(x-(-1))(x-4) = k(x+1)(x-4)$$

Funktionen f är inte entydigt bestämd endast genom sina nollställen. Det kan gå många parablar genom två punkter (grafen till vänster nedan). De olika kurvorna svarar mot olika värden på konstanten k.



4.2.3 Bestäm ytterligare ett funktionsvärde

Bestäm en punkt som kurvan skall gå genom, ett funktionsvärde någonstans som "låser fast" f. Jag väljer punkten $(3, 2)$ så att $f(3) = 2$. Pricka in den punkten också i ditt koordinatsystem (grafen till höger ovan).

4.2.4 Bestäm konstanten

Nu återstår att bestämma konstanten k. Det kan vi göra med hjälp av den punkt vi valde i förra momentet. Vi vet ju att $f(3) = 2$ och att

$$f(x) = k(x+1)(x-4)$$

Det ger oss en ekvation vi kan lösa med avseende på k.

$$\begin{aligned} f(3) &= 2 \\ k(3+1)(3-4) &= 2 \\ k \cdot 4 \cdot (-1) &= 2 \\ k &= \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Nu vet vi alltså:

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-4).$$

4.2.5 Till polynomform

Multiplicera ihop faktorerna så att f blir på polynomform:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2}(x+1)(x-4) = \\ &= -\frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + x - 4\right) = \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + 2. \end{aligned}$$

4.2.6 Kontroll

Kontrollera att du räknat rätt genom att sätta in de värden på x där du vet funktionens värden.

$$f(-1) = -\frac{(-1)^2}{2} + \frac{3(-1)}{2} + 2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 2 = 0$$
$$f(4) = -\frac{4^2}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} + 2 = -\frac{16}{2} + \frac{12}{2} + 2 = -8 + 6 + 2 = 0$$
$$f(3) = -\frac{3^2}{2} + \frac{3 \cdot 3}{2} + 2 = -\frac{9}{2} + \frac{9}{2} + 2 = 2$$

4.2.7 Lös andragradsekvationen

Lös nu ekvationen $f(x) = 0$ för att se att lösningarna blir $x = -1$ och $x = 4$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
-\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}+2 &= 0 \\
x^2-3x-4 &= 0 \qquad \text{Till pq - form} \\
x &= -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2-(-4)} \qquad \text{Enligt pq - formeln} \\
&= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{16}{4}} \\
&= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\
&= \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \\
x_1 &= -1 \\
x_2 &= 4
\end{aligned}
$$

Bra! Lösningarna blev det de skulle.

4.2.8 Kvadratkompletterad form

Skriv om funktionen från polynomform till kvadratkompletterad form. I detta exempel är det mest praktiskt att bryta ut en faktor $-\frac{1}{2}$ så att man slipper strula med en faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ i det man lägger till och drar bort. Observera bara att när man multiplicerar tillbaka faktorn $\frac{1}{2}$ in i parentesen som är i kvadrat, så kommer denna "delas upp" med en faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ i vardera av de två faktorerna.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}+2 = \\
&= -\frac{1}{2}\left(x^2-3x-4\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2-4\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-\frac{16}{4}\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right) = \\
&= -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{3}{2}\right)\right)^2+\frac{25}{8}
\end{aligned}
$$

Vi ser att det är ett minustecken framför kvadraten, symmetrilinjen $x_s = \frac{3}{2}$ och $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och extremvärdet (i detta fall funktionens största värde) är $\beta = \frac{25}{8}$.

4.2.9 Kontroll: Bestäm symmetrilinjen ur nollställena

Beräkna det värde på x där symmetrilinjen går genom att använda nollställena. Symmetrilinjen går mellan (har samma värde som medelvärdet av) nollställena. I mitt fall får jag

$$x_s = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$$

Detta stämmer med vad vi fick i då vi skrev f på kvadratkompletterad form.

4.2.10 Kontroll: Beräkna extremvärde ur polynomform

Räkna ut funktionens minsta eller största värde (beroende på om tecknet framför x^2-termen är $+$ eller $-$). För alla parablar gäller att detta inträffar på symmetrilinjen. Vi får

$$f\left(x_s\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} + 2 = -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} + 2 = -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + \frac{16}{8} = \frac{25}{8} = 3,125$$

vilket också stämmer med vad vi fick i då vi skrev f på kvadratkompletterad form.

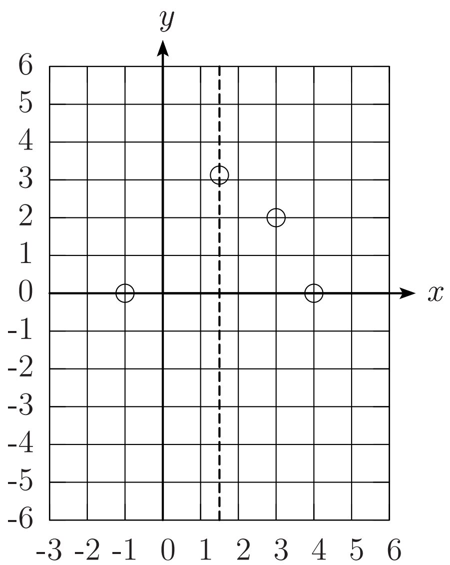
4.2.11 Rita symmetrilinjen

Rita in symmetrilinjen och punkten

$$\left(x_s, f\left(x_s\right)\right)$$

i ditt koordinatsystem. I mitt fall blir punkten alltså

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{25}{8}\right) = (1,5; 3,125).$$

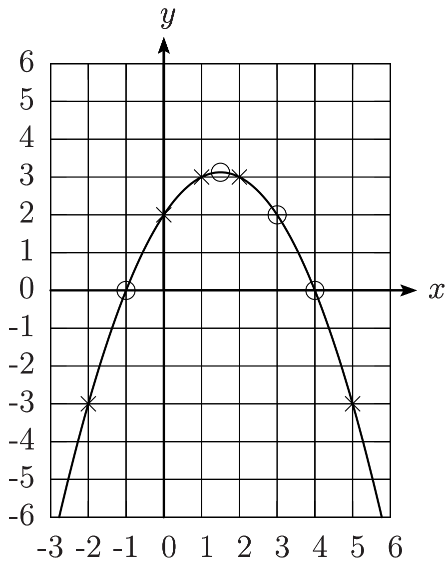


4.2.12 Rita kurvan

Rita kurvan $y = f(x)$ i ditt koordinatsystem. Detta gör du genom att välja några värden på x och räkna ut motsvarande funktionsvärden. Du kan dessutom utnyttja att funktionsvärden för två värden på x som befinner sig lika långt från symmetrilinjen blir lika. Till exempel borde $f(0)$ vara 2 eftersom 0 och 3 ligger lika långt från symmetrilinjen.

x	$f(x)$
-2 och 5	-3
-1 och 4	0
0 och 3	2
1 och 2	3
$\frac{3}{2}$	3,125

När du har prickat in detta i ditt koordinatsystem ritar du grafen.

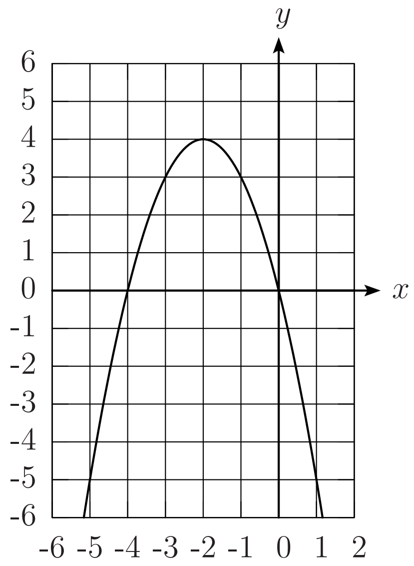


4.3 Vad du borde bli bra på nu

Genom att upprepa denna övning för olika val av nollställen och den tredje punkten bör du få så djup insikt i denna del av matematiken att följande övningar upplevs som lätta.

- Faktorisera polynomet $x^2 - 2x - 5$.
- Lös ekvationen $2x^2 + x - 10 = 0$.
- Ange det största värde funktionen $f(x) = -3x^2 - x + 18$ antar.
- Ange ett uttryck för det polynom vars graf visas i grafen nedan.

Du skall alltså kunna dyka ned på vilken länk som helst i kedjan nollställen - faktorform - polynomform - kvadratkompletterad form - andragradsekvation - symmetrilinje - graf - nollställen och kunna ta dig till alla andra länkar utan problem.



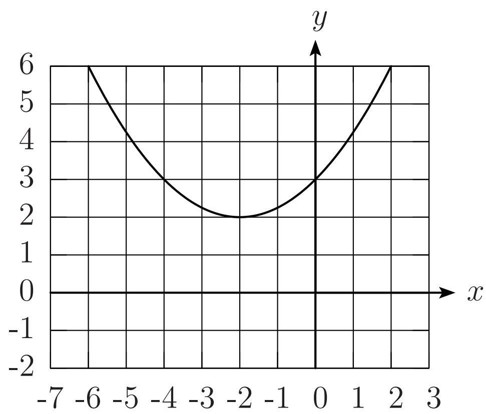
4.3.1 Anmärkning 1

Vad händer om man väljer samma värde på x två gånger för nollställena? Det går alldeles utmärkt. Om du exempelvis väljer $x = 2$ två gånger får du ett uttryck på formen $f(x) = k(x-2)(x-2) = k(x-2)^2$.

Sen är det bara att följa instruktionerna. Testa så får du se vad som händer!

4.3.2 Anmärkning 2

Vad händer om man börjar med en graf som inte skär x-axeln någon gång? Till exempel kan det se ut som i grafen nedan.



En graf som denna hör ihop med andragradsekvationer som saknar lösning (när det blir ett negativt tal under rot-tecknet i pq-formeln). Figuren ovan visar grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 3.$$

Försök lösa ekvationen $f(x) = 0$ så får du se vad som händer.

Polynom av den här typen går alltså inte att faktorisera och motsvarar ungefär vad primtal är i de hela talen. De är *irreducibla polynom*.