

MATEMATIKHISTORIA 2.0

MED TALTEORI

JOHAN WILD

12 JANUARI 2011

©Johan Wild 2009

johan.wild@europaskolan.se

Får gärna användas i undervisning, kontakta i så fall författaren.

12 januari 2011

Innehåll

1	Inledning	5
2	Grunder	5
2.1	Talmängder	5
2.2	Räkneoperationer	6
2.3	Inverser	6
3	Grupper, ringar och kroppar	7
3.1	Grupper	7
3.2	Ringar	9
3.3	Kroppar	10
3.4	Övningar	10
4	Historia	10
5	De gamla	11
5.1	Nilen	11
5.2	Egypten	11
5.3	Babylonien	12
5.4	Kina	13
5.5	Indien	13
5.6	Gemensamt för de gamla rikena	13
6	Grekland	13
6.1	Thales 624 - 548 f Kr	14
6.2	Pythagoras 569 - 475 f Kr	14
6.3	Zenon 490 - 425 f Kr	15
6.4	Sokrates 470 - 399 f Kr	15
6.5	Platon 427 - 347 f Kr	15
6.6	Aristoteles 384 - 322 f Kr	16
6.7	Euklides 325 - 265 f Kr	16
6.7.1	Elementa	17
6.8	Geometri och talteori	17
7	Grundläggande talteori	17
7.1	Primtal och faktorer	17
7.2	Divisorer och delare	19
7.3	Faktorisering i praktiken	19
7.4	Största gemensamma delare	21
7.5	Minsta gemensamma multipel	22

7.6	Tal som är relativt prima	23
7.7	Tillämpningar	23
7.8	Övningar	24
8	Lite om bevisföring	24
8.1	Implikation och ekvivalens	24
8.2	Övningar	25
9	Finns division?	25
9.1	Kvot och rest	25
10	Lite om pythagoréernas matematik	26
10.1	Talmystik	26
10.2	Jämna och udda tal	27
10.3	Pythagoréisk trippel	28
10.4	Perfekta tal	29
10.5	Mättade och vänskapliga tal	30
10.6	Övningar	30
11	Mer om talens historia	30
11.1	Det onaturliga talet noll	30
11.2	De negativa talen	31
11.3	Hur man betecknar tal	31
11.3.1	Positionssystemet	32
11.3.2	Babylonierna	32
11.4	Algoritmer för räkning med hela tal	33
11.4.1	Europas ovilja att acceptera nymodigheter	33
11.5	Rationella och irrationella tal	34
12	Vår tids matematik	35
12.1	Om att konstruera talmängder	35
12.2	Uppräknelighet	36
12.2.1	Hela tal och rationella tal	36
12.2.2	Reella tal	37
12.2.3	Transcendentta och algebraiska tal	38
13	Bilagor	38
13.1	Axiom för ringar	38

1 Inledning

Denna lilla text har flera syften. Den skall

1. vända upp och ned på några begrepp du tror dig känna till, så att matematiken blir lite mer spännande,
2. introducera matematiken utifrån ett historiskt perspektiv,
3. introducera matematiken utifrån ett vetenskapligt perspektiv, samt
4. framställa matematiken på ett sådant sätt att den tränar läsning av svåra texter.

Framförallt punkt 2 och 3 kan inte göras samtidigt. Det finns en motsägelse i dessa mål, då människan har kunnat räkna så mycket längre än människan har haft behov av att ge beräkningarna och resonemangen sådan struktur att man kan kalla det för vetenskapen matematik. Därför får det bli lite hopp i både den historiska framställningen såväl som i den matematiska strukturen.

2 Grunder

2.1 Talmängder

Först måste vi reda ut vad vi egentligen arbetar med. Det finns vissa vedertagna symboler för de olika talmängderna som kan vara bra att känna till. De naturliga talen betecknas \mathbb{N} .

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Skrivsättet med tre punkter i slutet betyder att du skall tänka dig att talföljden fortsätter enligt mönstret i det oändliga.

Heltalen har fått beteckningen \mathbb{Z} .

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Dessa två sätt att uttrycka \mathbb{Z} är vanliga. I den sista varianten skall alltså följden börja med oändligt många negativa heltal före -3 och fortsätta med oändligt många heltal efter 3 . Bokstaven Z för denna mängd kommer av tyskans *zhal* som betyder tal.

Skillnaden mellan \mathbb{N} och \mathbb{Z} är alltså att \mathbb{N} inte innehåller varken talet 0 eller de negativa talen.

Symbolen \in betyder ”tillhör”, den kan också utläsas ”i” eller ”som tillhör”. Symbolen \notin betyder ”tillhör ej”, jämför med symbolerna $=$ och \neq .

Exempelvis gäller $0 \in \mathbb{Z}$, $-2 \notin \mathbb{N}$ och $3 \in \mathbb{Z}$. Observera också att alla naturliga tal är heltal, men inte tvärt om.

Ibland har man glädje av att ange att ett eller flera element inte tillhör en mängd. Symbolen \setminus används för detta och utläses ”utom”. Exempel gäller $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$. Detta utläses ”de naturliga talen är de positiva heltalen

utom talet noll”. Observera också skrivsättet med ett litet $+$ på \mathbb{Z} för att ange de positiva heltalen. Talet 0 är alltså ett positivt tal.

Vidare finns de rationella talen. Ibland kallar man även dessa ”bråk”. Symbolen som används för dem är \mathbb{Q} , vilket kommer från engelskans ord för kvot, ”quotient”.

Exempelvis gäller $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $-\frac{7}{3} \in \mathbb{Q}$, $2 \in \mathbb{Q}$ och $\frac{2}{5} \notin \mathbb{N}$. Observera att alla heltal (och därmed alla naturliga tal) också är rationella tal. Exempelvis gäller ju $2 = \frac{2}{1}$.

Det finns två talmängder till, men vi återkommer till dessa, eftersom de inte behövs i den inledande delen av denna text.

2.2 Räkneoperationer

Nu måste vi reda ut vad man får göra med tal. Det finns *två* räknesätt, addition och multiplikation. Subtraktion ”finns inte”! När vi skriver $5 - 3$ menar vi i själva verket $5 + (-3)$. Det finns alltså två betydelser av tecknen $+$ och $-$. Dels kan de säga något om hur talen är (positiva eller negativa), dels kan de säga vad som skall göras med talen (adderas eller subtraheras). Att man använder samma tecken för dessa båda betydelser är ganska olyckligt ur pedagogiskt perspektiv, men sådant är livet.

På samma sätt ”finns inte” division. När vi skriver $8/2$ menar vi i själva verket $8 \cdot \frac{1}{2}$. Subtraktion och division är alltså inte egna räknesätt som du är vana att tänka på dem, utan bara kortare skrivsätt för addition och multiplikation. Av praktiska skäl använder vi naturligtvis ordet subtrahera och skriver till exempel $5 - 3$, poängen är att det matematiskt sett inte är en egen operation.

2.3 Inverser

Antag nu att vi bara räknar med tal ur mängden \mathbb{Z} .

Om man har ett heltal, till exempel 2, och till det av misstag råkat addera heltalet 3, fås heltalet 5. Det är dock ingen fara. Addition kan göras o gjort med subtraktion, vi kan subtrahera 3 från 5 och återfå 2. Mera matematiskt har vi egentligen adderat ”motsatsen” till 3, nämligen talet -3 :

$$5 + (-3) = 2.$$

Med ett finare namn benämns talet -3 den *additiva inversen* till 3 (de är faktiskt *varandras* inverser). Att invertera betyder ungefär att *vända ut och in*, eller *göra baklänges*. Alla heltal a har en additiv invers: $-a$. Talet 0 är sin egen invers.

Med ett mer precist matematiskt språkbruk sammanfattar vi detta med följande definition.

Definition 2.3.1. Talet a är *additiv invers* till talet b om $a + b = 0$.

Om man däremot av misstag råkat multiplicera heltalet 2 med heltalet 3 kan man inte göra detta o gjort. Man kan inte multiplicera resultatet 6 med något heltal och återfå heltalet 2. Det är samma sak som att ekvationen $6x = 2$ saknar lösning bland heltalen.

Med ett finare språkbruk kan man säga att talet 3 saknar *multiplikativ invers*.

Du inser säkert att man mycket väl kan lösa ekvationen $6x = 2$, lösningen blir ju $x = \frac{1}{3}$. Poängen är att lösningen då inte längre är ett heltal, utan ett rationellt tal. Ekvationen är alltså lösbar i \mathbb{Q} .

Om vi tar med de rationella talen i beräkningarna får varje heltal en multiplikativ invers. Till exempel gäller

$$3 \cdot \frac{1}{3} = 1.$$

Den multiplikativa inversen till 3 är alltså $\frac{1}{3}$.

Definition 2.3.2. Talet a är *multiplikativ invers* till talet b om $a \cdot b = 1$.

I \mathbb{Z} är det bara 1 och -1 som har multiplikativ invers. I \mathbb{Q} har alla tal utom 0 multiplikativ invers.

3 Grupper, ringar och kroppar

Nu när vi har olika typer av tal och två räknesätt, är det dags att bilda olika strukturer. Människan har kunnat räkna väldigt länge, men vetenskapen matematik är bara ca 2500 år gammal (jag räknar den här som från och med grekerna). Det är dock inte förrän på 1800-talet som den formulerades på det sätt som i detta avsnitt.

Då hade man också kommit så långt att man inte bara räknade med tal. Man insåg att det finns annat man kan ”räkna” med på precis samma sätt. Man lyckades tillslut ge namn åt och ge precisa definitioner åt sådana ”system”.

Vi skall snart se på några sådana strukturer, men först måste vi reda ut vad som menas med några ord.

Definition 3.0.3. Låt M vara en mängd och a, b och c vara godtyckliga element i M . Låt $+$ beteckna en räkneoperation i denna mängd. Operationen är *sluten* om $a + b \in M$, är *kommutativ* om $a + b = b + a$ och *associativ* om $(a + b) + c = a + (b + c)$. Det finns ett *enhetsselement* $e \in M$ till operationen om $a + e = a$ gäller för alla $a \in M$.

Exempel på en icke sluten operation är till exempel fallet där mängden är alla udda tal och operationen är addition. Exempelvis gäller då $3 + 5 = 8$ vilket är ett jämnt tal. Operationen ”leder ut” ur mängden, så att säga.

Ett annat exempel är räkning med addition och multiplikation i \mathbb{Z}^- (de negativa heltalen). Här är addition sluten, $(-4) + (-5) = -9$, men inte multiplikation, $(-4) \cdot (-5) = 20 \notin \mathbb{Z}^-$.

Den vanliga multiplikationen är, liksom additionen, kommutativ för tal av olika sorters tal. Exempelvis gäller ju $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$.

3.1 Grupper

Ett sådant system är det fall då man har en mängd (till exempel tal, men det måste inte vara tal) och *en* räkneoperation.

Definition 3.1.1. En *grupp* består av en mängd och en räkneoperation som uppfyller följande krav.

1. Operationen skall vara sluten och associativ.
2. Det skall finnas ett enhetselement till operationen.
3. Alla element skall ha en invers under operationen.

Om räkneoperationen dessutom är kommutativ har man en *kommutativ grupp*.

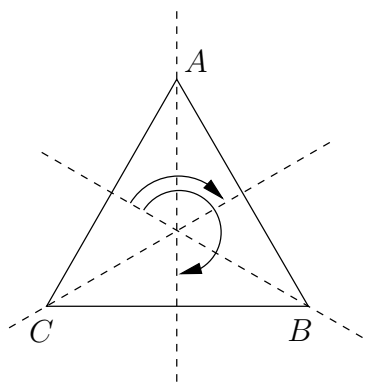
Skall man vara noga betecknas en grupp med ett par, en mängd och en operation, till exempel $(\mathbb{Z}, +)$. Om inget missförstånd kan uppstå använder man ibland bara mängdens namn som beteckning även för gruppen.

Exempel 3.1.2. $(\mathbb{Z}, +)$ är en kommutativ grupp. Addition är både sluten, kommutativ och associativ, och alla element i \mathbb{Z} har en additiv invers. Enhetselementet i gruppen är talet 0. ▲

Exempel 3.1.3. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ är en kommutativ grupp. Multiplikation är både sluten, kommutativ och associativ, och alla element i \mathbb{Q} utom 0 har en multiplikativ invers. Enhetselementet i gruppen är talet 1. ▲

För att det skall bli någon poäng med det hela måste vi ta ett exempel som inte rör just tal också.

Exempel 3.1.4. Symmetrioperationerna på en liksidig triangel utgör en icke-kommutativ grupp. Låt A , B och C vara hörnpunkterna i en liksidig triangel. En symmetrioperation på ett objekt är en operation som lämnar objektet oförändrat. Symmetrioperationerna på en triangeln nedan är E , att inte göra någonting, R_1 och R_2 , att vrida triangeln runt sitt centrum med 120° respektive 240° , samt R_3 , R_4 och R_5 , att vrida triangeln 180° runt axlarna genom A , B respektive C .

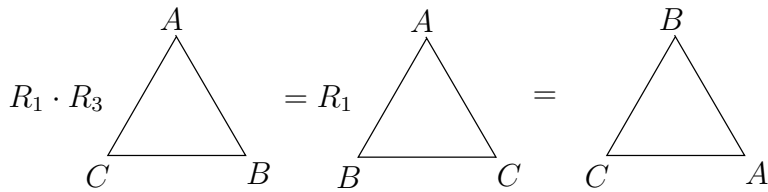


Under R_1 byter hörnen plats enligt $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$ och $C \rightarrow A$. Under R_3 är hörn A stilla, men hörnen B och C byter plats.

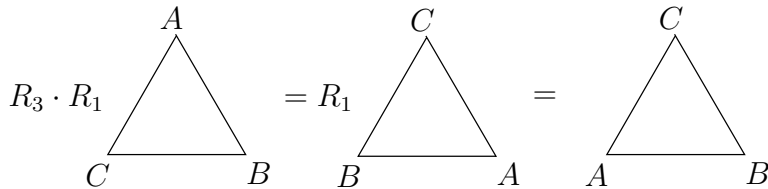
Operationerna kan nu kombineras. Låt symbolen \cdot stå för detta. Till exempel gäller här $R_1 \cdot R_1 = R_2$ och $R_1 \cdot R_2 = E$.

Mängden $\{E, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$ och operationen \cdot utgör tillsammans en grupp. E är enhetselementet. Alla element har en invers. Operationerna R_1 och R_2 är varandras inverser och R_3 , R_4 och R_5 är alla sina egna inverser.

Det intressanta med denna grupp är att den inte är kommutativ. Till exempel gäller $R_1 \cdot R_3 = R_5$.



Som du ser blir resultatet av att först verka med R_3 och sedan med R_1 samma sak som att verka med R_5 . Om man istället byter ordning får vi $R_3 \cdot R_1 = R_4$.



Alltså gäller $R_1 \cdot R_3 \neq R_3 \cdot R_1$ i denna grupp! ▲

Exempel 3.1.5. Ett annat roligt exempel på en grupp är addition på en klocka. Låt \mathbb{Z}_{12} stå för talen $\{0, 1, 2, \dots, 11\}$ och låt räkneoperationen $+$ gå till som på en klocka, d v s du "börjar om" vid 0 då du kommit till 12. Till exempel gäller då $2 + 7 = 10$, $3 + 11 = 2$, $0 + 4 = 4$ och $10 + 6 = 4$.

Denna grupp är kommutativ. Till exempel gäller $9 + 5 = 5 + 9$. Enhets-elementet är naturligtvis talet 0.

Alla element har en invers. Till exempel är inversen till 4 talet 8 eftersom $4 + 8 = 0$. ▲

3.2 Ringar

Vi är ju vana vid två räknesätt, inte bara ett som i en grupp.

Definition 3.2.1. En *ring* består av en mängd och två räkneoperationer. Båda skall vara slutna, associativa och ha ett enhetselement. En av dem skall vara kommutativ. Alla element skall ha en invers till den kommutativa operationen.

Om båda operationerna är kommutativa är säger man att ringen är kommutativ .

Exempel 3.2.2. De hela talen, \mathbb{Z} , utgör tillsammans med operationerna addition och multiplikation en ring. Alla tal har en additiv invers, men det finns ingen invers till multiplikationen. Enhets-elementet till addition är talet 0 och enhets-elementet till multiplikation är talet 1. ▲

Exempel 3.2.3. I högre kurser i matematik kommer du att stöta på något som kallas polynom. Dessa utgör också en ring. ▲

Exempel 3.2.4. Klockan \mathbb{Z}_{12} utgör en ring. Även vid multiplikation måste du tänka på att "börja om vid 0" då du "kommit till 12". Exempelvis gäller $3 \cdot 3 = 9$, $5 \cdot 5 = 1$, $2 \cdot 8 = 4$, $2 \cdot 2 = 4$ och $4 \cdot 4 = 2$.

Alla element har inte en multiplikativ invers. Vissa har det dock, till exempel 5 som du såg ovan. ▲

3.3 Kroppar

Det finaste man kan ha är en kropp! Det märker du av dess definition.

Definition 3.3.1. En *kropp* består av en mängd och två räkneoperationer som båda är slutna, associativa och har enhetselement. En av operationerna skall vara kommutativ. Alla element utom enhetselementet till den kommutativa operationen skall ha en invers till den andra operationen.

Skillnaden mellan en kropp och en ring är alltså att alla element skall ha en multiplikativ invers i kroppen.

Exempel 3.3.2. De rationella talen, \mathbb{Q} , utgör tillsammans med operationerna addition och multiplikation en kropp. Alla element utom 0 har en multiplikativ invers. ▲

Exempel 3.3.3. Som du såg hade inte alla element i \mathbb{Z}_{12} en multiplikativ invers. Om du däremot tänker dig en ”klocka” där antalet timmar är ett primtal så får man en kropp. Dessa brukar betecknas med \mathbb{Z}_p , där det då är underförstått att p står för ett primtal. ▲

3.4 Övningar

1. Bilda hela multiplikationstabellen för symmetrioperationerna på en liksidig triangel. Rita trianglar på samma sätt som i exempel 3.1.4.
2. Vilka tal mer än 5 har multiplikativ invers i \mathbb{Z}_{12} .
3. Fyll i hela multiplikationstabellen för \mathbb{Z}_5 nedan.

	1	2	3	4
1	1		3	
2			1	
3				
4		3		

4 Historia

Texter om matematikens historia brukar inledas med att studera Babylonien, Egypten, Kina och Indien. Det man brukar intressera sig för är följande frågeställningar.

- Hur skrevs tal? Vilka siffror användes och på vilket sätt kombinerades dessa till tal?
- Hur räknade man? Vilka systematiska metoder hade man för att kombinera två tal till ett nytt vid till exempel addition?
- Hade man ekvationer och (linjära) ekvationssystem? Kunde man göra abstrakta uttryck för problemställningar och kunde man kombinera dessa för att lösa avancerade problem?
- Hur behandlades irrationella tal och kvadratiske ekvationer? Hur löstes problemet med tal som inte går att uttrycka i bråkform?

- Vad kände man till om geometri?
- Vilken världsuppfattning hade man? Ofta hänger detta ihop med kännedomen om astronomi och den matematik som krävs för att göra förutsägelser om sådana spørsmål.

Efter dessa gamla kulturer brukar man ta upp den matematik som fanns i Grekland, hur araberna förvaltade och vidareutvecklade denna och vad som hände då européer äntligen hade vett att ta till oss av arabernas kunskaper.

Under Romarriket utvecklades nämligen nästan ingen matematik alls. Inte heller finns det så mycket spår av högre matematik från syd- och mellan-amerika.

Denna text tar upp de gamla kulturerna och grekerna till och med Euklides. Tyngdpunkten ligger på Pythagoras och dennes talteori.

5 De gamla

5.1 Nilen

Nilen är världens längsta flod. Den har sina källor i Victoriasjön och i de Etiopiska bergen. Människan uppstod i trakterna för Nilens källor, och det är också längs Nilen denna historia om matematiken tar sin början.

Nilen rinner idag genom mycket torra och fattiga länder. Dess vatten är livsnödvändigt för invånarna i området, både för bevattning och för transporter. Innan människan exploaterade Nilen svämmade den årligen över så att smältvattnet från bergen uppströms nådde lågländerna. Denna flodvåg förde med sig mycket näringsrikt slam. När Nilen efter hand sjönk kvarstod en bördig mylla. Detta möjliggjorde ett fruktbart jordbruk som gjorde folket, eller i alla fall den härskande eliten, rik och mäktig för ca 4000 år sedan.

Tyvärr förstördes gränsmarkeringar av vattnet. Därför måste man mäta upp jorden på nytt varje år för att rättvist kunna fördela åkermarken. Ur detta behov sägs geometrin ha fötts. Geometri betyder nämligen jordmätning.

Eftersom mycket vatten dunstar under passagen genom Sudans och Egyptens öknar är det inte mycket av vattnet som når ut i Medelhavet. Det stora delta som finns norr om Kairo vore inte ens farbart med båt om det inte vore för byggda kanaler.

Invånarna runt Nilen har i alla tider byggt bevattningskanaler, som med tiden gjorde att allt mindre vatten nådde nedströms. Bland annat för att bli mindre beroende av sina uppströms grannar, och för att få jämnare flöde under hela året, byggde Egypten den jättelika Assuandammen som stod klar 1970. I den kan ett helt års förbrukning av vatten lagras.

5.2 Egypten

Längs Nilen har det funnits jordbruk från ca år 5000 f Kr. Den första dynastin med makt i både övre och nedre Egypten hade sin storhetstid

ca 3100 f Kr. Hieroglyferna översattes ca 1800 e Kr av Jean Champollion (1790 - 1832) med hjälp av den s k Rosettastenen. På den är en text nedtecknad både på grekiska och med hieroglyfer, vilket möjliggjorde översättningen.

Någon gång mellan år 2000 och år 1800 f Kr, i det mellersta riket, nedtecknades Rhindpapyren. Dessa kallas så efter Henry Rhind som hittade dem år 1858. De innehåller ca 110 matematiska problem med lösningar. De utgör tillsammans med Moskvapapyren (vilka kallas så för att de idag förvaras i Moskva) och några andra funna texter huvudkällan för vår kunskap om den matematiska vetenskapen i Egypten.

Vid denna tid behärskade Egyptierna bråkräkning, ekvationslösning och beräkningar av ytor och volymer. Lustigt nog finns inte någon metod för att beräkna volymen av en pyramid med. Däremot finns det angivet hur man beräknar volymen av en stympad pyramid, en pyramid med en mindre pyramid i toppen avlägsnad.

Bråk nedtecknades som summor av *stambråk*, bråk med ett i täljaren. Egyptierna hade alltså inget sätt att skriva $\frac{5}{6}$, utan uttryckte det som $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

De hade ingen utvecklad algebra för att lösa ekvationer, men ett exempelproblem är: Ett tal och dess fjärdedel har summan 15. Vilket är talet? Detta problem löstes genom ett resonemang: Utgå från talet 4, vars fjärdedel är 1. Summan av dessa är 5 som blott är en tredjedel av vad den skall vara. Därför måste det sökta talet vara $4 \cdot 3 = 12$.

Man kan konstatera att Egyptierna var tvungna att vara ganska smarta, även för att lösa ganska enkla problem. Idag skulle vi lösa samma problem genom att nedteckna ekvationen

$$x + \frac{x}{4} = 15.$$

Genom att använda algebra systematiskt och utan att behöva tänka så mycket i varje steg kommer vi lätt fram till att lösningen är $x = 12$.

Sensmoralen är alltså att *människan har uppfunnit matematiken för att slippa tänka och vara smart*. Matematiken gör problemlösning enklare!

5.3 Babylonien

Ordet *meso* är grekiska och betyder mellan. Namnet mesopotamien syftar på landet mellan floderna Eufrat och Tigris. Babylonien är namnet på den kultur som rådde där 2300 - 1600 f Kr.

Kungen Hammurabi härskade där omkring 1700 f Kr. Från denna tid finns lertavlor med kilskrift bevarade, varav vissa innehåller matematik. På 1850-talet lyckades Henry Rawlingson tolka dessa tecken.

Babylonierna kunde även lösa ekvationssystem med upp till fem obekanta, lösa andragradsekvationer och vissa tredjegradssekvationer. De kände även till det samband vi idag kallar Pythagoras sats. Intressant är att de inte gjorde skillnad på aritmetik och geometri.

5.4 Kina

Shang-dynastin härskade i Kina från ca år 1600 f Kr. Från denna tid finns vissa inskriptioner i ben bevarade av matematisk natur. Från ca år 1000 f Kr härskade Zhou-dynastin, vilken senare bröts upp i feodala småstater. Runt år 600 f kr började man använda järn. Akademier knutna till hoven i dessa småstater växte fram. En av de mer kända akademikerna från denna tid är Konfucius.

År 221 f Kr enas återigen alla småstater under Qin Shi Huangdi. Han införde bland annat ett standardiserat måttsystem. Denna dynasti varade i ca 400 år.

Kineserna kände till ungefär samma matematik som egyptierna och babylonierna, men låg flera hundra år efter dem. Det är inte säkerställt om de hade kontakt med varandra.

5.5 Indien

Runt Indusfloden växte en kultur fram ca år 3000 f Kr. Man har inte hittat någon bevarad matematik från denna kultur. Tusen år senare växte det fram en annan kultur runt floden Ganges.

Skrifter finns från denna tid som handlar om hur man gör hållfasthetsberäkningar vid byggnationer av tempel i tegel. Dock användes inte tegel vid denna tid, vilket man gjorde under den tidigare tiden. De siffror vi använder idag härrör från indien, men från en mycket senare tid.

5.6 Gemensamt för de gamla rikena

Följande punkter kan sammanfatta vad de gamla rikena har gemensamt vad gäller synen på matematik och sättet den behandlades på.

- Matematiken var ett redskap för handel och ingenjörskonst, matematiken hade inte mycket egenvärde i sig.
- Resultaten presenteras till exempel i skrifter om hur man bygger ett altare eller en fördämning. Det finns nästan inga fristående verk som handlar om matematiken i sig.
- De hade inga sätt att kontrollera om matematiska uttryck (formler) stämmer. Även om de kunde beräkna en vinkels storlek kvarstod fortfarande det mättekniska problemet att kontrollera resultatet. De var svårt att tillverka mätinstrument med tillräcklig precision.
- Matematiken växer fram med starka ledare som inför gemensamma måttsystem och som har råd att hålla matematiker vid sitt hov.

6 Grekland

Tiden för det gamla Grekland brukar delas in i tre delar. Tabellen nedan anger hur detta görs samt vilka matematiker som tas upp i denna essä.

Ekpok	Period	Matematiker
Klassisk tid	500 - 338 f Kr	Thales, Pythagoras, Zenon
Hellenistisk tid	338 - 30 f Kr	(Sokrates), Platon, Aristoteles, Euklides
Romersk tid	30 f Kr - 395 e Kr	

De händelser som markerar skiften mellan epokerna är när Alexander den store invaderar Grekland år 338 f Kr och när Romarna gör det samma år 30 f Kr samt när Romarriket delas år 395 e Kr.

6.1 Thales 624 - 548 f Kr

Thales gjorde många resor, bland annat till Babylonien och Egypten, där han lärde sig mycket astronomi och geometri. Thales brukar tas som den förste grekiske matematikern. Han var den förste som formulerade påståenden av den typ vi kallar *satser*.

Några geometriska satser brukar tillskrivas Thales. Dessa är:

- *Thales sats* Varje vinkel, som är inskriven i en halvcirkel, är rät.
- En cirkel halveras av sin diameter.
- Basvinklarna i en likbent triangel är lika stora.
- Vertikalvinklar är lika stora.
- Om två vinklar och en sida i en triangel är lika stora med var sin av två vinklar och en lika belägen sida i en annan triangel, så är triangelarna kongruenta.

Thales bevisade inte dessa satser som Euklides senare gjorde i *Elementa*. Det finns två anledningar till att Thales och dessa satser tas upp i denna text. Dels brukar den första benämnas Thales sats och tas normalt upp i kursen Matematik B. Dels kanske det är överraskande att dessa över huvud taget är satser som går att bevisa utifrån mer grundläggande antaganden. Dessa sanningar brukar närmast betraktas som axiom på gymnasienivå.

6.2 Pythagoras 569 - 475 f Kr

Pythagoras växte upp på Samos, en ö i Egeiska havet. Han hade kontakt med Thales under sin studietid och ägnade därefter 20 år åt resor, bland annat till Egypten och Babylonien.

Under Pythagoras reseår hade Samos förvandlats från en tillåtande och öppen stat till en tyranni under Polykrates. Pythagoras avböjde ett erbjudande om att verka vid hans hov och bosatte sig i en grotta på en avlägsen del av ön. Pythagoras fick muta sin första elev att ta lektioner. När eleven efter en tid hellre betalade för utbildningen var han fast.

Vid denna tid hade de grekiska statsstaterna bildat kolonier på kusterna till närliggande delar av medelhavet. En av dessa kolonier i Magna Graecia, stor-grekland, var Kroton som ligger i nuvarande södra Italien. Dit begav sig Pythagoras, som nu var känd som "den vise från Samos". Han

fick beskydd och finansiering av en rik man vid namn Milon, som hade segrat 12 gånger i de Olympiska och Pythiska spelen.

Här grundade Pythagoras en blandning mellan akademi och religiös sekt vars valspråk var "Allt är tal". Lärjungarna kallades pythagoréer. Sällskapet var hemligt och man fäste stor vikt vid att upptäckterna inte kom till allmänhetens kännedom. Det berättas att en man som avslöjade dodekaedern dränktes.

Även kvinnor fick delta. Till exempel var en dotter till Milon med, vilken Pythagoras gifte sig med.

De studerade även harmoniska klanger med strängar. Detta är ett av de första exempel på hur man kopplat ihop naturfenomen med matematik.

Pythagoras levde tyvärr under en orolig tid. Milons stad var i krig med en grannstad. Avundsjuka mot att pythagoréerna inte avslöjade sina upptäckter ledde till att en man som tidigare nekats inträde i brödraskapet hetsade folket mot dem. Milons hus brändes ned. Milon undkom, men inte Pythagoras.

Det som främst skiljer pythagoréerna och deras studier av matematik från tidigare kulturer är att de studerade matematiken för dess egen skull, samt att de försökte formulera matematiken *axiomatiskt-deduktivt*. Det senare betyder att de försökte bygga upp matematiken från ett litet antal grundläggande antaganden, *axiom*, och ur dessa försöka bevisa att andra påståenden är sanna.

6.3 Zenon 490 - 425 f Kr

I sin ungdom var Zenon pythagoré. Med tiden blev han mer filosof än matematiker. Han är känd för sina paradoxer, bland annat den om Akilles och sköldpaddan som tas upp på lektionstid. Sokrates skall enligt Platon ha mött Zenon i sin ungdom.

6.4 Sokrates 470 - 399 f Kr

En av de viktigaste filosoferna för utvecklingen av den västerländska kulturen. Nämnas här mest för att göra trion Sokrates - Platon - Aristoteles komplett.

6.5 Platon 427 - 347 f Kr

Grundade en akademi i Aten ca 385 f Kr där man studerade, undervisade och forskade i allt möjligt, bland annat filosofi och matematik. Ovanför porten lär det ha stått "Låt ingen som är obevandrad i geometri komma in här".

Platons namn återfinns inom matematiken genom att de fem regelbundna månghörningarna, ibland kallas för de Platonska kropparna. Dessa var viktiga för Platons beskrivning av naturen. Tetraedern stod för eld, kuben för jord, oktaedern för luft och ikosaedern för vatten. Dodekaedern stod för hela universum.

6.6 Aristoteles 384 - 322 f Kr

Från 18-års ålder till Platons död studerade Aristoteles vid Platons akademi. Efter detta blev han privatlärare åt Alexander den store då denne var ung. Alexanders pappa Filip II var kung i Makedonien. Grekerna tyckte att makedonierna var obildade barbarer, vilket Filip på sätt och vis höll med om eftersom han gav i uppdrag åt grekernas störste vetenskapsman att bilda hans son. Detta var ett led i att göra Makedonien mer grekiskt.

Aristoteles var verksam inom många områden. Bland annat härrör uppdelningen av kunskap i *episteme*, det vi skulle kalla vetenskap idag, *fronesis*, vishet/klokhhet samt *techne*, den form av tyst kunskap som exempelvis "sitter i handen" på den som är duktig på att tälja.

Det främsta bidrag Aristoteles lämnade till matematiken var att han lade grunden till logiken och för logiska resonemang. Följande tabell beskriver fyra mycket viktiga begrepp Aristoteles införde.

Begrepp	Förklaring
<i>Axiom</i>	Grundläggande sanning som är gemensam för alla vetenskaper.
<i>Postulat</i>	Grundläggande sanning för en enskild vetenskap.
<i>Påstående</i>	Kan visas vara antingen sanna eller falska.
<i>Sats/teorem</i>	Ett påstående som visats vara sant.

Skillnaden mellan axiom och postulat kan exemplifieras med två citat ur Elementa. Ett postulat är *Man kan dra en rät linje från en punkt till en annan* och ett axiom är *Storheter som är lika med en och samma storhet är också inbördes lika*. Vi ser alltså hur postulatet rör endast geometrin, medan axiomet är inte är knutet till en vetenskap.

Nu för tiden gör man inte så stor skillnad på axiom och postulat. Det ord som fått ge vika är postulat.

En samling axiom och postulat utgör ett *axiomatiskt system*, eller ett *formellt system*.

Senare i denna text skall vi se hur de moderna axiomen för algebran är formulerade.

6.7 Euklides 325 - 265 f Kr

Euklides var verksam i Alexandria större delen av sitt liv. Troligen studerade han under elever till Platon.

Efter Alexander den stores död 323 f Kr fick en av Alexanders generaler, Ptolemaios, makten över Egypten. Han grundade i Alexandria ett Museion, ett slags universitet, en samlingsplats för lärda, i praktiken ett statsfinansierat forskningsinstitut.

Idag återfinns ordet museion i musiskt lärande, vilket innefattar bildkonst, drama, musik etc. Härur är även ordet musik bildat. Förr räknades alltså matematik och filosofi till denna typ av konstform. Hur som helst verkade Euklides vid denna institution.

6.7.1 Elementa

Euklides största bedrift var att han skrev ned mycket av den matematik som var känd vid denna tid i en serie böcker med namnet Elementa. Denna innehåller 13 böcker, eller kapitel, som av tradition betecknas med romerska siffror. Tabellen nedan visar vad de innehåller.

Bok	Innehåll
Bok I-VI	Plangeometri
Bok VII-IX	Talteori och aritmetik
Bok X	Inkommensurabla storheter
Bok XI-XIII	Rymdgeometri

Innehållet framställdes axiomatiskt-deduktivt vilket var nytt, men inspirerat från Aristoteles. *Deduktiv* bevisföring betyder att resultatet är en logisk följd av givna förutsättningar. Motsatsen är *induktiv* bevisföring där slutsatser dras från enstaka (vanligtvis flera) händelser.

Elementa är så gedigen att den har använts som läromedel under mer än 2000 år. Det är bara på senare årtionden som svenska läromedel lämnat den axiomatiska framställningen av geometrin.

6.8 Geometri och talteori

För grekerna var geometri en sak och talteori och räkning en annan. Geometri var något man utförde med en ograderad linjal och passare. Med endast dessa hjälpmedel kan man bevisa satser och göra geometriska konstruktioner.

Ett bra exempel på denna skillnad är det som kallas Pythagoras sats. Den säger att för en rätvinklig triangel är summan av kvadraterna av längden av de två kortaste sidorna lika stor som kvadraten av längden av den längsta sidan. Observera att det alltså inte är meningen att man skall mäta sidorna och genomföra denna beräkning. Man kan bevisa påståendet endast med ovan nämnda hjälpmedel.

De pythagoréiska tripletterna rör heltal och hör hemma i talteorin.

7 Grundläggande talteori

I hela detta avsnitt använder vi bara heltal. Vi räknar alltså med ringen \mathbb{Z} .

7.1 Primtal och faktorer

Vissa tal går att uttrycka som produkten av två andra tal, två *faktorer*.

Exempel 7.1.1. $33 = 3 \cdot 11$. ▲

Vissa tal går inte att skriva som produkten av två andra tal. Sådana tal kallas *primtal*.

Exempel 7.1.2. Talen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 och 23 är exempel på primtal. ▲

Notera att talet 1 inte räknas som ett primtal.

Att uttrycka ett tal som produkten av endast primtal kallas för *att faktorisera talet*. I praktiken kanske man måste göra detta i flera steg.

Exempel 7.1.3. $42 = 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7.$ ▲

Exempel 7.1.4. $18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2.$ ▲

Exempel 7.1.5. $18 = 3 \cdot 6 = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2.$ ▲

De två sista exemplen visar att de två olika sätten att bryta upp talet 18 gav tillslut samma uppsättning primtalsfaktorer. Detta gäller generellt. Därför formulerar vi följande mycket viktiga sats.

Sats 7.1.6. *Faktoriseringen av ett tal är entydig.*

Beviset för denna sats är högst icke-trivialt (väldigt svårt), så det utelämnas. Notera dock att det inte på något vis är självklart. Vi såg ju i exempel 3.2.4 att faktoriseringen inte är entydig i \mathbb{Z}_{12} . Där gäller ju både $4 = 2 \cdot 2$ och $4 = 4 \cdot 4$.

I sammanhang där man faktorerar tal menar man normalt att man är intresserad av att skriva talen som produkter av primtal. Att skriva 42 som $6 \cdot 7$ räknas alltså inte som en faktorisering, eftersom talet 6 kan skrivas som $2 \cdot 3$.

Ibland är det bra att ha ett ord för det antal gånger en faktor förekommer i faktoriseringen av ett tal.

Definition 7.1.7. *Multipliciteten* för en faktor i ett tal är det antal gånger faktorn förekommer i talet.

Exempel 7.1.8. Multipliciteten för faktorn 3 i talet 18 är alltså två, och faktorn 2 har multiplicitet ett. ▲

Det finns oändligt många tal. Är det då självklart att det finns oändligt många primtal? Nej, varför skulle det inte räcka med ett ändligt antal, som kan kombineras på ett oändligt antal sätt? Det kan man kanske tycka, men så är det inte. Man kan visa att följande är sant.

Sats 7.1.9. *Det finns oändligt många primtal.*

Nedan följer beviset för denna sats. Därefter några exempel på hur beviset skall tolkas.

Bevis. Antag att det finns ändligt många primtal, n st, $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_n$. Nu bildar vi ett tal q som är produkten av alla dessa, $q = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p_n$.

Addera 1 till dessa och bilda därigenom talet $q + 1$. Detta tal är större än q , men inte så pass mycket större som en extra faktor 2. Det är inte heller en hel faktor 3 större. På samma sätt innehåller talet $q + 1$ inte någon extra faktor av något av de n primtalen. Däremot behöver inte $q + 1$ vara ett primtal, men det kan vara det.

Talet $q + 1$ är i alla fall inte delbart med något primtal av de n primtalen. Antagandet att det skulle finnas ändligt många primtal måste i båda fallen vara fel. □

Exempel 7.1.10. Om det bara skulle ha funnits tre primtal, 2, 3 och 5 skulle vi alltså ha bildat produkten av dessa, $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, och sedan adderat 1, $30 + 1 = 31$, vilket är ett primtal.

Tänk igenom att man lika gärna skulle ha kunnat subtrahera 1 och också fått ett primtal, $30 - 1 = 29$. ▲

Exempel 7.1.11. Om det bara skulle ha funnits sex primtal, 2, 3, 5, 7, 11 och 13 skulle vi ha bildat $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30030$ och sedan $30030 + 1 = 30031$, som inte är ett nytt primtal.

Däremot är 30031 delbart med två primtal som inte är två av de ursprungliga sex, $30031 = 59 \cdot 509$

Vi ser alltså att man inte kan bilda alla primtal på detta sätt. ▲

7.2 Divisorer och delare

Ett tal som delar ett annat tal sägs vara en *divisor* (eller *delare*) till detta tal. Mer precist gör vi följande definition.

Definition 7.2.1. Ett tal a är en *delare* till ett tal n om det finns ett heltal b så att $n = a \cdot b$

Exempel 7.2.2. Talet 6 är en delare till 42. Talet 42 har delarna 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 och 42. ▲

Ofta använder man symbolen D_a för att ange delaremängden till talet a . Till exempel gäller $D_{42} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$.

I vissa sammanhang räknas inte talet själv med i sin delaremängd, och ibland räknas även de negativa delarna med (då skulle till exempel $-14 \in D_{42}$ gälla). Sammanhanget får avgöra det om det inte preciseras.

Symbolen $|$ används för att uttrycka att ”delar”. Uttrycket $3 | 6$ utläses ”tre delar sex”. Symbolen \nmid är negationen till $|$ och utläses ”delar inte”. Exempelvis gäller $5 \nmid 7$.

Observera att ett uttryck av typen $5 | 24$ är *sant* eller *falskt*. Exemplet $5 | 24$ falskt. Ett vanligt missförstånd är att tolka det som någon slags symbol för division. Att skriva $4 | 24 = 6$ är alltså helt fel.

7.3 Faktorisering i praktiken

Små tal kan ofta faktoriseras endast genom att man kommer ihåg multiplikationstabellen och använder den baklänges.

Det är lätt att se att $56 = 7 \cdot 8 = 2^3 \cdot 7$. Däremot är det kanske mindre uppenbart att $2993 = 41 \cdot 73$ eller att $22770 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23$. Skall sådana tal faktoriseras är det bäst att ta en dator till hjälp.

Däremot finns det vissa knep att ta till. Alla jämna tal är exempelvis delbara med 2 (detta skall utvidgas till en definition senare, se 10.2.1). Till exempel gäller $206 = 2 \cdot 103$. För andra tal kan följande satser vara till hjälp.

Sats 7.3.1. *Tal vars siffersumma har delaren 3, har också själv delaren 3.*

Vi skall bevisa denna sats, men för att det skall bli lättare att följa beviset tas först ett exempel.

Exempel 7.3.2. Vi undersöker om $3 \mid 846$. Eftersom talet 846 är skrivet i basen 10 gäller

$$\begin{aligned} 846 &= 8 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 6 = \\ &= 8 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 6 = \\ &= 8 \cdot (9 + 1)^2 + 4 \cdot (9 + 1) + 6 = \\ &= 8 \cdot (9^2 + 2 \cdot 9 + 1) + 4 \cdot (9 + 1) + 6 = \\ &= (8 \cdot 9^2 + 8 \cdot 2 \cdot 9 + 4 \cdot 9) + (8 + 4 + 6). \end{aligned}$$

Alla termer i den en första parentes innehåller faktorn 9 och därmed faktorn 3. Om hela talet skall innehålla faktorn 3 måste alltså summan i den andra parentes, talets siffersumma, innehålla faktorn 3. ▲

Om troliggörandet ovan skall finslipas så att det blir ett formellt bevis måste detta hantera ett godtyckligt tal.

Bevis. Låt talet uttryckas med siffrorna $s_n s_{n-1} \dots s_0$. Vi skall nu visa att talet är delbart med tre (eller nio) om $s_n + s_{n-1} + \dots + s_1 + s_0$ är delbart med tre (eller nio). Eftersom talet är skrivet i basen tio gäller

$$\begin{aligned} s_n s_{n-1} \dots s_0 &= s_n \cdot 10^n + s_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + s_1 \cdot 10 + s_0 = \\ &= s_n \cdot (9 + 1)^n + s_{n-1} \cdot (9 + 1)^{n-1} + \dots + s_1 \cdot (9 + 1) + s_0 = \\ &= (\text{Termer som innehåller faktorn 9}) + (s_n + s_{n-1} + \dots + s_0). \end{aligned}$$

Alla termer i den första parentes uppkommer då alla $(9 + 1)$ multipliceras ihop när någon 9:a används. Jämför med uttrycket $(8 \cdot 9^2 + 8 \cdot 2 \cdot 9 + 4 \cdot 9)$ i exemplet ovan. Det är möjligt att bilda ett precist uttryck för dessa termer, men det faller lite utanför denna texts intentioner.

Sen sista termen uppkommer då alla 1:or används i alla $(9 + 1)$. Denna term är just talets siffersumma. Vi ser alltså att en förutsättning för att ett tal skall vara delbart med tre är att dess siffersumma skall vara delbar med tre. □

Exempel 7.3.3. $12 = 2^2 \cdot 3$ 12 har siffersumman 3. ▲

Exempel 7.3.4. $2118 = 2 \cdot 3 \cdot 353$ 2118 har siffersumman 12 ▲

Sats 7.3.5. *Tal vars två sista siffror är delbara med 4, är delbara med 4.*

Följande exempel kan tjäna som idéskiss för beviset av satsen.

Exempel 7.3.6. $34564 = 345 \cdot 100 + 64 = 345 \cdot 25 \cdot 4 + 16 \cdot 4 = 4 \cdot (345 \cdot 25 + 16) = 4 \cdot 8641$. ▲

Följande sats är du nog bekant med. Försök bevisa den själv. Det går till som i satsen ovan.

Sats 7.3.7. *Tal som slutar på 0 eller 5 har delaren 5.*

Till sist finns ett resultat som rör tal delbara med 9.

Sats 7.3.8. *Tal vars siffersumma har delaren 9, har också själv delaren 9.*

Beviset för denna sats är samma som beviset för satsen om tal som är delbara med 3.

Dessa satser är de enklaste satserna om faktorisering. Det finns fler satser som är tillämpbara i olika sammanhang, men de blir allt mer jobbiga att använda och allt mer begränsade till en mindre grupp tal.

Faktum är att det inte finns något smart sätt att faktorisera stora tal. Den som kommer på det kommer antingen bli mycket rik och berömd eller mördad. Att detta är svårt är nämligen mycket viktigt vid kryptering och dekryptering.

Om någon löste detta problem skulle vi inte kunna använda dagens metod för att kryptera information vid kommunikation mellan till exempel en bankomat och banken. Hela IT-samhället bygger (i dagsläget) på att detta problem inte löses.

En organisation som lägger mycket resurser på att finna en metod för att faktorisera stora tal snabbt är NSA, National Security Agency, i USA. Vem vet, kanske har de redan lyckats!

7.4 Största gemensamma delare

Två tal kan naturligtvis ha samma delare. Ofta är det intressant att försöka hitta den största gemensamma delaren till två tal.

Exempel 7.4.1. Talen 84 och 90 har båda delarna 2, 3 och 6. Däremot har 84 bland annat delaren 12, vilket inte 90 har. ▲

Definition 7.4.2. Talet d är den *största gemensamma delaren* till a och b om

1. $d \mid a$ och $d \mid b$,
2. om $c \mid a$ och $c \mid b$ gäller $c \leq d$.

En metod för att hitta den största gemensamma delaren till två tal är att studera faktoriseringen av talen.

Sats 7.4.3. *Den största gemensamma delaren till två tal är produkten av alla faktorer som finns i båda talen.*

Exempel 7.4.4. Vilken är den största gemensamma delaren till talen 12 och 18?

$$\begin{array}{rcl} 12 & = & 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ 18 & = & 2 \cdot \quad 3 \cdot 3 \\ & & 2 \cdot \quad 3 \quad = 6 \end{array}$$

Om man skriver ut alla faktorer och ställer dem under varandra som exemplet visar, är det lätt att se vilka faktorer som är gemensamma. Talen 12 och 18 har alltså båda faktorerna 2 och 3 vilket ger att deras största gemensamma delare är 6. ▲

Eftersom det är jobbigt att skriva största gemensamma delare brukar man använda förkortningen sgd (eller gcd efter engelskans greatest common divisor) och skrivsättet $\text{sgd}(12, 18) = 6$.

Exempel 7.4.5. Vilken är den största gemensamma delaren till talen 210 och 220?

$$\begin{array}{r} 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ 220 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 \\ = 2 \cdot 5 = 10 \quad \text{sgd}(210, 220) = 10 \end{array}$$

▲

7.5 Minsta gemensamma multipel

Definition 7.5.1. Ett tal a är en *multipel* av b om det finns ett naturligt tal m så att $a = m \cdot b$.

Exempel 7.5.2. Talen 4, 8, 12, 16, ... är *multiplar* av talet 4. ▲

Ett mycket intressant problem är följande: Vilket är det minsta tal som är multipel av två givna tal? Detta är den *minsta gemensamma multipeln*, mgm, till de båda talen.

Exempel 7.5.3. Talet $216 = 12 \cdot 18$ är en multipel till både talet 12 och talet 18. Talet 216 är alltså en gemensam multipel till 12 och 18, men det är inte den minsta gemensamma multipeln. ▲

Även mgm går att bestämma genom att studera faktoriseringen.

Sats 7.5.4. Den minsta gemensamma multipeln till två tal är produkten av de faktorer som förekommer någon gång i de båda talens faktorisering.

Exempel 7.5.5. Vilken är den minsta gemensamma multipeln till talen 12 och 18?

$$\begin{array}{r} 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \\ = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36 \quad \text{mgm}(12, 18) = 36 \end{array}$$

Det minsta tal som är en multipel av både 12 och 18 är $36 = 3 \cdot 12 = 2 \cdot 18$.

▲

Exempel 7.5.6. Vilken är den minsta gemensamma multipeln till talen 210 och 220?

$$\begin{array}{r} 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ 220 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 \\ = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 4620 \end{array}$$

Det minsta tal som är en multipel av både 210 och 220 är $4620 = 22 \cdot 210 = 21 \cdot 220$. ▲

Det finns ett samband mellan den största gemensamma delaren till två tal och talens minsta gemensamma multipel.

Sats 7.5.7. För två tal a och b gäller $a \cdot b = \text{sgd}(a, b) \cdot \text{mgm}(a, b)$.

Den uppmärksamme läsaren har kanske noterat att det aldrig gavs en precis definition av mgm. Eller rättare sagt: Det gavs ingen definition uttryckt med ett precist matematiskt språk. Det var inga oklarheter i den definition som gavs (vilket är det viktiga) och den är inte mindre rätt än en mer matematisk variant.

Den skulle till sin utformning likna definitionen av sgd, vara en uppgradering av krav på mgm i stil med att det skall vara en multipel av två tal och dessutom det minsta sådana tal. För att slippa skriva sådant tas sats 7.5.7 som definition av mgm.

7.6 Tal som är relativt prima

Två tal sägs vara *relativt prima* om de saknar gemensamma faktorer. Det betyder att deras största gemensamma delare är 1 och deras minsta gemensamma multipel är deras produkt.

Exempel 7.6.1. Talen $33 = 3 \cdot 11$ och $35 = 5 \cdot 7$ är relativt prima. Vidare gäller $\text{sgd}(33, 35) = 1$ och $\text{mgm}(33, 35) = 33 \cdot 35 = 1155$. ▲

Två primtal är naturligtvis alltid relativt prima.

7.7 Tillämpningar

Det finns tillämpningar av denna teori i verkligheten. Däremot är nog största skälet till att öva sig till att bli duktig på att faktorisera tal och ta fram största gemensamma delaren och minsta gemensamma multipeln till par av tal, att annan matematik blir enklare då.

Till exempel är det som brukar kallas för minsta gemensamma nämnaren till två bråk, i själva verket just den minsta gemensamma multipeln till nämnarna.

Exempel 7.7.1. Beräkna $\frac{8}{12} + \frac{12}{18}$.

$$\frac{8}{12} + \frac{12}{18} = \frac{8 \cdot 3}{12 \cdot 3} + \frac{12 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{24}{36} + \frac{24}{36} = \frac{48}{36}$$

▲

När sedan resultatet skall förkortas är det just den största gemensamma delaren till täljare och nämnare man delar med.

Exempel 7.7.2. Förkorta $48/36$ så mycket som möjligt.

$$\frac{48}{36} = \frac{4 \cdot 12}{3 \cdot 12} = \frac{4}{3}$$

▲

Ett annat exempel då denna teori kommer till användning är då man skall bryta ut den största gemensamma faktorn ur ett uttryck.

Exempel 7.7.3. Bryt ut största möjliga faktor ur uttrycket $18x + 12y$.

$$18x + 12y = 6 \cdot 3x + 6 \cdot 2y = 6(3x + 2y)$$

▲

Naturligtvis finns fler och mer avancerade exempel. I kurserna Matematik B och Matematik C kommer denna teori inte bara tillämpas på tal, utan även på variabler och polynom.

Begreppet relativt prima tal har en tillämpning i problem av följande typ. Om du har en hink som rymmer 3 liter och en som rymmer 5 liter, hur kan du då kombinera dessa så att du får en liter vatten (förutsatt att du har någonstans att hålla vattnet och att du har en kran som du kan tappa oändligt mycket vatten ur om du skulle behöva)?

Lösningen är att du mäter upp två fulla hinkar om 5 liter och från detta tar bort tre fulla hinkar om 3 liter, då får du en liter kvar: $2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 1$.

Detta var möjligt endast eftersom hinkarnas volymer var relativt prima. Du skulle aldrig kunna bilda en liter genom att använda hinkar om t ex 6 och 4 liter. Däremot skulle du kunna bilda två liter vatten eftersom $\text{sgd}(4, 6) = 2$.

7.8 Övningar

1. Bevisa sats 7.3.5.
2. Bevisa sats 7.3.7.
3. Bevisa sats 7.5.7.
4. Formulera en definition av minsta gemensamma multipel med ett mer matematiskt språkbruk än den som gavs. Jämför med 7.4.2.
5. Dito för relativt prima.

8 Lite om bevisföring

8.1 Implikation och ekvivalens

Satserna om delbarhet, sats 7.3.1, 7.3.5 och 7.3.7, är formulerade ”åt ena hållet”. Exempelvis säger sats 7.3.1 att *om* ett tals siffersumma är delbar med 3 *så är* talet delbart med tre.

Gäller det omvända? Gäller det att *om* ett tal är delbart med 3 *så är* talets siffersumma delbart med 3? Det är inte alls säkert! Beviset av sats 7.3.1 är i alla fall inte skrivet åt det hållet, så vi kan inte dra den slutsatsen ur det beviset.

Jämför med några mer vardagliga exempel. Påståendet ”om det regnar är vägen blöt” är sant. Det omvända gäller inte. Bara för att vägen är blöt behöver det inte regna. Någon kan ju till exempel ha tvättat sin bil.

Det finns finare ord och symboler för att skilja situationerna åt. Sats 7.3.1 säger

$$3 \mid \text{Siffersumman} \Rightarrow 3 \mid \text{Tal.}$$

Detta är en *implikation* och symbolen \Rightarrow är en *implikationspil* och utläses *implicerar* eller *leder till*.

Nu råkar det vara så att omvändningen till sats 7.3.1 gäller,

$$3 \mid \text{Tal} \Rightarrow 3 \mid \text{Siffersumman.}$$

Beviset för detta är i princip bara att skriva beviset för sats 7.3.1 baklänges. Ibland är det inte så enkelt.

Om två påståenden leder till varandra på detta sätt säger man att de är *ekvivalenta* och man skriver

$$3 \mid \text{Tal} \Leftrightarrow 3 \mid \text{Siffersumman.}$$

Symbolen \Leftrightarrow är en *ekvivalenspil* och utläses ”är ekvivalent med”.

Om man vill formura sig korrekt och få med båda hållen i ett och samma uttalande skulle man kunna säga att ett tal är delbart med tre *om och endast om* dess siffersumma är delbar med tre. Det finns alltså inget annat sätt för ett tal att vara delbart med tre än att dess siffersumma är delbar med tre. Jämför med påståendet ”*om och endast om* det är tisdag imorgon är det måndag idag”.

En sats som gäller åt båda hållen från geometrin är Pythagoras sats. Vi brukar ju tänka på den såhär: Om en triangel är rätvinklig så gäller $a^2 + b^2 = c^2$ (där a , b och c står för sidorna i triangeln, varav c är den längsta).

Omvändningen till detta är alltså också sant. *Om och endast om* en triangel uppfyller Pythagoras sats, är den rät.

8.2 Övningar

1. Formulera satserna om delbarhet åt andra hållet.
2. Bevisa satserna åt detta håll.

9 Finns division?

Ovan nämns att orden faktor och delare är synonymer om man inte menar just printalfaktor då man säger faktor. Exempelvis säger vi att talet 7 är en faktor i talet 42 eftersom $42 = 6 \cdot 7$. Vi säger också att talet 7 delar talet 42 med kvoten 6. Hur hade det blivit om divisionen inte hade gått jämnt upp? Kom ihåg att vi ännu så länge bara sysslar med heltal!

Det vore inte så praktiskt att ha en matematik där vissa räkneoperationer bara gäller vissa par av tal. I så fall skulle man till exempel få dela 42 med 7, men inte med 11. Så kan man inte ha det! Vi skall se hur man kan komma runt problemet och ändå prata om division av heltal trots att det egentligen inte går.

9.1 Kvot och rest

Definition 9.1.1. Om talet n delas med talet a fås *kvoten* q och *resten* $r < a$ om $n = aq + r$. Divisionen sägs gå *jämnt upp* om resten blir noll.

Exempel 9.1.2. Om 42 delas med 11 fås kvoten 3 och resten 9 eftersom $42 = 11 \cdot 3 + 9$. Om talet 15 delas med 5 fås kvoten 3 och resten 0 eftersom $15 = 5 \cdot 3 + 0$, divisionen går jämnt upp. ▲

Följande sats är mycket naturlig. Du kanske tycker den är självklar, men den tas ändå upp här eftersom dess motsvarighet vid räkning med polynom kommer att vara mycket viktig.

Sats 9.1.3. *Talet a är en delare till n om och endast om resten blir noll då n delas med a .*

I olika sammanhang kan det vara lika rätt att säga ”talet 11 delar inte talet 42” och ”talet 11 delar talet 42 med resten 9”.

Begreppen kvot och rest dyker upp på ett naturligt sätt i algoritmen för division av tal, vilket följande exempel visar.

$$\begin{array}{r} 172 \\ 1035 \overline{) 6} \\ -6 \\ \hline 43 \\ -42 \\ \hline 15 \\ -12 \\ \hline 3 \end{array}$$

Resten är det som blir kvar när siffrorna i talet som skall delas tagit slut, här fås resten 3 då 1035 delas med 6.

10 Lite om pythagoréernas matematik

10.1 Talmystik

För pythagoréerna var allt tal. Hela deras värld kretsade kring talen som en slags religion. Tabellen nedan visar på den religiösa innebörden för de några tal.

Tal	Innebörd
1	Det som skapar alla andra tal.
2	Det första talet. Representerar motsats. Det första jämna talet. Jämna tal var kvinnliga och udda tal manliga.
3	Det första udda talet. Representerade harmoni.
4	Det första kvadratiske talet. Representerade rättvisa.
5	Representerade äktenskap. Summan av mannen och kvinnan.
6	Representerade skapelse.
7	Heligt eftersom det fanns sju planeter.
10	Det heligaste talet. Universums tal eftersom $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ och <i>ett</i> element behövs för att bestämma en punkt, <i>två</i> element behövs för att bestämma en linje, <i>tre</i> element behövs för att bestämma ett plan och <i>fyra</i> element behövs för att bestämma en tetraeder. Triangelantal.

10.2 Jämna och udda tal

Pythagoréerna representerade tal som ett antal punkter. Ett tal definierades som jämnt om det gick att dela in punktmängden i två lika stora grupper. Ur detta går det bevisa följande satser.

1. Summan av jämna tal är ett jämnt tal.
2. Summan av ett udda tal och ett jämnt tal är ett udda tal.
3. Summan av två udda tal är ett jämnt tal.
4. (Följdsats) Summan av ett jämnt antal udda tal är ett jämnt tal.
5. Kvadraten av ett jämnt tal är ett jämnt tal och kvadraten av ett udda tal är ett udda tal.

Här skall vi jämföra hur några definitioner och bevis skiljer sig mellan den moderna matematiken och hur Pythagoreerna gjorde samma sak.

Definition 10.2.1. *Modern definition* Talet n är *jämnt* om n innehåller minst en faktor 2. Då kan n skrivas $n = 2m$ för något tal m . Talet n är *udda* om det inte innehåller någon faktor 2. Då kan n skrivas på formen $n = 2m + 1$.

Pythagoreisk definition Talet n är *jämnt* om n st föremål kan ordnas i två lika stora grupper. Om inte detta går är n *udda*.

Vår intuitiva uppfattning om tal säger oss naturligtvis att de båda definitionerna är ekvivalenta, de betyder samma sak. Däremot blir bevisföringen lite olika i de båda fallen.

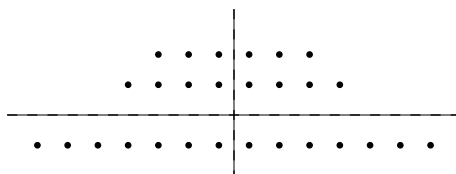
Sats 10.2.2. *Summan av två jämna tal är ett jämnt tal, summan av två udda tal är ett jämnt tal, summan av ett udda och ett jämnt tal är ett udda tal.*

Bevis. Modernt bevis Låt j_1 och j_2 vara två jämna tal och u_1 och u_2 vara två udda tal. Enligt definition 10.2.1 kan skrivas $j_1 = 2k_1$, $j_2 = 2k_2$, $u_1 = 2v_1 + 1$ och $u_2 = 2v_2 + 1$. Summorna blir då

$$\begin{aligned}j_1 + j_2 &= 2k_1 + 2k_2 &= 2(k_1 + k_2) \\u_1 + u_2 &= 2v_1 + 1 + 2v_2 + 1 &= 2(v_1 + v_2 + 1) \\j_1 + u_1 &= 2k_1 + 2v_1 + 1 &= 2(k_1 + v_1) + 1.\end{aligned}$$

Vi ser alltså att summan av två jämna tal blir jämnt eftersom summan innehåller faktorn 2, liksom summan av två udda tal. Däremot gör inte summan av ett udda och ett jämnt det.

Pythagoreiskt bevis Följande exempel visar att summan av 6 och 8 är jämnt.



Generellt gäller att två jämna tal per definition vardera kan delas upp i två lika stora delar. Talens summa kan då också delas upp i två lika stora delar, båda bildade genom att summera en del från vardera av de två ursprungliga talen.

Om ett udda tal adderas till ett jämnt blir det en enhet över som måste läggas till någon av summans delar, som då inte blir lika stora.

Summan av två udda tal blir däremot jämn eftersom det blir två enheter över som kan läggas en till varje av summans delar. \square

Vi kan passa på att formulera ett par användbara satser till.

Sats 10.2.3. *Kvadraten av ett jämnt tal är jämnt och kvadraten av ett udda tal är udda.*

Bevis. Vi använder oss av notationen från föregående bevis.

$$\begin{array}{ll} j_1^2 = (2k_1)^2 = 2 \cdot 2 \cdot k_1^2 & \text{Jämnt} \\ u_1^2 = (2v_1 + 1)^2 = (2v_1)^2 + 2 \cdot 2v_1 + 1 = 2(2v_1^2 + 2v_1) + 1 & \text{Udda} \end{array}$$

\square

10.3 Pythagoréisk trippel

Pythagoréerna gillade att gruppera tal som med olika definitioner på något vis hör ihop.

Definition 10.3.1. Trippeln (a, b, c) där $a, b < c$, utgör en *pythagoréisk trippel* om $a^2 + b^2 = c^2$.

Exempel 10.3.2. Talen $(3, 4, 5)$ utgör en pythagoréisk trippel eftersom $3^2 + 4^2 = 5^2$. Ett annat exempel är $(8, 15, 17)$. \blacktriangle

Observera att detta inte har någonting att göra med det som kallas pythagoras sats. Pythagoréerna, liksom alla grekiska matematiker vid den här tiden, gjorde stor skillnad på geometri och aritmetik. Pythagoras sats var för övrigt känd i Mesopotamien 1500 år innan Pythagoras levde.

Det finns flera formler för att skapa pythagoréiska trippletter. Pythagoréerna kände till följande sats.

Sats 10.3.3. *Låt m vara ett positivt udda heltal. Då utgör talen (a, b, c) där*

$$\begin{array}{l} a = m \\ b = \frac{m^2 - 1}{2} \\ c = \frac{m^2 + 1}{2} \end{array}$$

en pythagoréisk trippel.

Platon kände till att man kunde välja (a, b, c) på ytterligare ett sätt.

Sats 10.3.4. Låt m vara ett positivt heltal. Då utgör talen (a, b, c) där

$$\begin{aligned}a &= 4m \\b &= 4m^2 - 1 \\c &= 4m^2 + 1\end{aligned}$$

en pythagoreisk trippel.

Inget av dessa båda val ger alla pythagoréiska trippletter. Den enda gemensamma de ger är $(3, 4, 5)$. Vill man få alla måste man blanda in fler variabler enligt följande sats.

Sats 10.3.5. Låt k, m, n vara positiva heltal där $m > n$. Då utgör talen (a, b, c)

$$\begin{aligned}a &= k(m^2 - n^2) \\b &= 2kmn \\c &= k(m^2 + n^2)\end{aligned}$$

en pythagoreisk trippel.

Pythagoréerna var inte de första att intressera sig för dessa trippletter. Babylonerna nedtecknade dem i tabeller på lertavlor som återfunnits.

10.4 Perfekta tal

Definition 10.4.1. Ett tal är *perfekt* om det är lika med summan av alla sina divisorer.

Följande exempel var kända under antiken:

$$\begin{aligned}6 &= 1 + 2 + 3 \\28 &= 1 + 2 + 4 + 7 + 14\end{aligned}$$

samt 496 och 8128.

I Elementa IV finns följande sats.

Sats 10.4.2. Om $2^n - 1$ är ett primtal är $m = 2^{n-1}(2^n - 1)$ perfekt.

Exempelvis är talet $2^5 - 1 = 31$ ett primtal. Alltså är talet $2^4(2^5 - 1) = 16 \cdot 31 = 496$ perfekt. Det är oklart om pythagoréerna kände denna sats, eller om den stammar från Euklides själv.

En reflektion är att alla perfekta tal på formen $2^{n-1}(2^n - 1)$ är jämna. Kan möjligen alla jämna perfekta tal skrivas på denna form? Detta visades av Euler på 1700-talet.

Om det existerar udda perfekta tal är fortfarande olöst. Man dock visat att det inte finns några udda perfekta tal mindre än 10^{300} . Det femte perfekta talet, $33550336 = 2^{12}(2^{13} - 1)$, upptäcktes först på 1400-talet.

10.5 Mättade och vänskapliga tal

Definition 10.5.1. Ett tal benämns *mättat* (*omöttat*) om summan av talets divisorer blir större (mindre) än talet. Om summan av talets divisorer är precis ett större (mindre) än talet benämns det *svagt mättat* (*svagt omöttat*).

Pythagoréerna kände till att alla tal på formen 2^n är svagt omöttade. Exempelvis har $2^3 = 8$ divisorerna 1, 2 och 4. Summan $1 + 2 + 4 = 7 = 8 - 1$, 8 är alltså ett svagt omöttat tal.

Pythagoréerna hittade aldrig några svagt mättade tal. Det är fortfarande okänt om de existerar.

Definition 10.5.2. Två tal benämns *vänskapliga* om de är summan av varandras divisorer.

Pythagoréerna kände till paret 220 och 284. Idag känner man till drygt 200 vänskapliga tal.

10.6 Övningar

1. Bevisa satserna 10.3.3, 10.3.4 och 10.3.5.
2. Varför måste m vara ett udda positivt heltal i sats 10.3.4?
3. Byt m i sats 10.3.3 mot $2m + 1$ och förenkla uttrycket. Vad vinner man på detta?
4. Varför måste $m > n$ i sats 10.3.5?
5. Kontrollera att 220 och 284 är vänskapliga.

11 Mer om talens historia

11.1 Det onaturliga talet noll

Man vet att talet noll användes redan ca 312 f Kr vid astronomiska beräkningar av matematiker i Babylonien. Talet noll användes även av en indisk matematiker vid namn Brahmagupta (född 589 e Kr). De arabiska matematiker som axlade grekernas mantel använde i grunden indiska siffror.

Det arabiska ordet *sifr* är en översättning av *sunya* från sanskrit, vilket betyder tom eller *icke existerande*. Ordet sifr blev det latinska ordet *zephirum*, vilket blev det engelska ordet *zero*. Vi använder ordet *siffra* för ett samlingsnamn för de symboler vi uttrycker tal med.

Det svenska ordet *noll* kan spåras från latinets *nullus*. Intressant nog finns det faktiskt en slags gradskillnad mellan noll och zero, vilket kan spåras tillbaka på hur respektive kultur (den Romerska respektive den Indiska) såg på tomhet och frånvaro rent filosofiskt. För Romarna betydde frånvaro att det frånvarande är på någon annan plats. Indierna däremot menade frånvaro i betydelsen att något verkligen inte existerar över huvud taget. Zero är alltså något starkare än noll.

Den som förde de arabiska siffrorna till Europa var Leonardo från Pisa (ca 1170 - 1250, även känd som Fibonacci. Vi återvänder till Leonardo senare. Varken romare eller greker använde nollan vid beräkningar. Hur som helst kom nollan sent till Europa och får därför inte vara med i de naturliga talen.

11.2 De negativa talen

De negativa talen har under mycket lång tid varit högst onaturliga i matematikhistorien. Grekerna skilde mycket starkt på talteori och geometri. Tal representerade objekt, vilka måste finnas och därmed inte kan vara negativa. I geometrin är avstånd alltid positiva.

Även araberna tänkte på avstånd som positiva. De sammanförde i viss mån det vi kallar algebra och geometri idag, även om de inte hade någon koordinatgeometri, vilket är en uppfinning från 1600-talet. För araberna var $x^2 + ax = b$ och $x^2 = ax - b$ två helt olika ekvationer.

11.3 Hur man betecknar tal

I alla tider har människan uttryckt tal med mer eller mindre komplicerade kombinationer av symboler. Vissa av dessa kombinationer är uttänkta så att de underlättar beräkningar.

Så är inte fallet med det romerska sättet att uttrycka tal. De använde ett system där vissa bokstäver betydde olika tal (I=1, V=5, X=10, C=100, D=500 och M=1000). Om ett mindre tal skrevs före ett större skulle det mindre subtraheras från det större. Om det mindre stod efter det större skulle talen adderas. Så blir till exempel 3=III, 4=IV, 6=VI, 1904=MCMIV.

I grekland användes under olika tider flera sätt att uttrycka tal, mer eller mindre lika det sätt romarna kom att använda. Beräkningar med dessa symboler var mycket komplicerade. Man använde kulramar och räknebrickor där kulor, stenar eller dylikt flyttades runt efter avancerade system.

Under hellenistisk tid använde grekerna bokstäver för att uttrycka tal. Naturligtvis använde grekerna det grekiska alfabetet, men det är inte viktigt för poängen här. Bokstaven a fick betyda 1, b var 2, c var 3 och så vidare upp till i som var 9. Bokstäverna j till r betydde 10 till 90 och s till α betydde 100 till 900.

Talet 12 blev alltså $jb = 10 + 2$, talet 823 blev $zkc = 800 + 20 + 3$ och talet 102 blev $sb = 100 + 2$. Notera för det första att det inte behövdes en symbol för noll. Notera för det andra att dessa tre tal lika gärna skulle kunna ha skrivits exempelvis $bj = 2 + 10$, $kzc = 20 + 800 + 3$ och $bs = 2 + 100$.

Var i talet de enskilda tecknen står, tecknens position, är alltså inte viktigt för tolkningen av talet. Grekerna använde nämligen inget positionssystem, men det gör vi!

11.3.1 Positionssystemet

När vi skriver 12 menar vi $1 \cdot 10 + 2$, och när vi skriver 21 menar vi $2 \cdot 10 + 1$. Vi använder nämligen normalt talet 10 som bas för att skriva tal.

Det spelar alltså roll vilken position siffrorna 1 respektive 2 har då vi uttrycker tal. Vi har också ord för de olika positionerna. I fallet 923 kallar vi siffran 9 för *hundra*tal eftersom dess plats står för att man skall tänka på den som multiplicerad med 100. Av samma anledning benämner vi siffran 2 med *tio*tal och 3:an *ental*.

En förutsättning för detta system är att man kan ange "tomma platser" med symbolen 0, som i fallet $102 = 1 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 2$.

För att ha något att jämföra med senare preciserar vi nu att ett tal uttryckt med $n + 1$ siffror i basen tio är ett skrivsätt så att

$$a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0 \Leftrightarrow a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

där de n symbolerna a_{n-1} till a_0 är någon av siffrorna 0 till 9 och symbolen a_n är någon av siffrorna 1 till 9 (om a_n är 0 har talet bara n siffror).

Observera att i vänsterledet av uttrycket ovan är symbolerna a_n till a_0 just symboler, medan de i högerledet representerar tal.

Fallet 102 är alltså ett tal med tre siffror ($n = 2$) där $a_2 = 1$, $a_1 = 0$ och $a_0 = 2$.

Även decimaler har värden som beror av vilken plats de har. Vi kallar den första för tiondel ($\frac{1}{10} = 10^{-1}$) och nästa för hundraedel ($\frac{1}{100} = 10^{-2}$). Talet 1,52 tolkas därför som $1 + 5 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$.

Detta system att beteckna tal införde alltså Leonardo från Pisa på 1200-talet. Han visade också på den stora fördelen med detta sätt att skriva tal: Det underlättar beräkningar!

Man kan använda andra baser än tio för att uttrycka tal. För att undvika missförstånd anges då basen som ett subscript till talet.

Exempel 11.3.1. Uttrycket 236_{10} och 354_8 anger samma plats på tal-linjen, de är samma tal uttryckt i baserna 10 respektive 8, ty

$$236_{10} = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 6 \cdot 10^0 = 3 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 4 \cdot 8^0 = 354_8.$$

▲

Exempel 11.3.2. Decimaler, det vi till exempel kallar tiondelar och hundraedelar, uttrycks på samma sätt.

$$5,5_{10} = 5 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} = 101,1_2.$$

▲

11.3.2 Babylonierna

Detta folk använde talet 60 som bas för att uttrycka tal. Möjligen använde de denna bas för att den har så många divisorer, vilket kan ha underlättat beräkningar. De hade ett positionssystem och kunde uttrycka decimaler. En vinkel kunde till exempel vara

$$32^\circ 25' 12'' = 32 \cdot 60^0 + 25 \cdot 60^{-1} + 12 \cdot 60^{-2}.$$

När de babyloniska skrifterna översattes till latin kallades talet framför 60^{-1} för pars prima minuta (första lilla delen) och talet framför 60^{-2} för pars secunda minuta (andra lilla delen). Härur kommer våra ord för minuter och sekunder. Att en timme har 60 minuter kan man alltså spåra mer än 4000 år bakåt i tiden.

11.4 Algoritmer för räkning med hela tal

Sedan tidigare vet du att det finns metoder att ställa upp beräkningar med tal så att dessa kan utföras enkelt. En väl preciserad metod att lösa ett problem i ett ändligt antal steg kallas för en *algoritm*. Vi går här inte in på hur algoritmerna för att addera, subtrahera, multiplicera och dividera två heltal går till. Jag hoppas följande exempel får dig att minnas.

$$\begin{array}{r}
 96 \\
 + 32 \\
 \hline
 128
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 96 \\
 - 24 \\
 \hline
 72
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 42 \\
 \cdot 14 \\
 \hline
 168 \\
 + 42 \\
 \hline
 588
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 172 \\
 1032 \overline{) 6} \\
 \underline{- 6} \\
 43 \\
 \underline{- 42} \\
 12 \\
 \underline{- 12} \\
 0
 \end{array}$$

Ordet *algoritm* kommer från en försvenskning (via andra språk) av namnet på en arabisk matematiker, Al-Kwarizmi (ca 790 - 840), som var en viktig länk mellan de indiska och arabiska matematikerna. Även ordet algebra härrör från honom. Det arabiska ordet *al-jabr* betyder ungefär *återför*, eller *flytta tillbaka*. Det användes som benämning på den operation som omvandlar $3x + 2 = 4 - 2x$ till $5x + 2 = 4$ genom att addera $2x$ till båda sidor för att eliminera en negativ term på ena sidan.

Operationen som omvandlar $5x + 2 = 4$ till $5x = 2$ genom att subtrahera 2 från båda sidor benämndes *al-muqalaba*, vilket betyder *jämförande*.

När Al-Kwarizmis texter översattes till latin översattes aldrig al-jabr, vilket så småningom kom att bli vårt ord algebra.

11.4.1 Europas ovilja att acceptera nymodigheter

Den gamla traditionen att använda kulram (abakus) eller de romerska räknebrädorna vid beräkningar levde länge kvar i Europa, långt efter det att Leonardo från Pisa införde de arabiska siffrorna och de algoritmer för räkning som fortfarande lärs ut till barn idag.

Det var mycket komplicerat att räkna med räknebrädorna. Utbildningen för att klara detta var på universitetsnivå, och ville man vara säker på att lära sig alla räknesätt (inte bara addition och subtraktion) räckte det inte med vilket universitet som helst i Tyskland eller Frankrike. Det skulle vara ett fint universitet i Italien! Detta berättas i en anekdot från 1400-talet.

En vältränad räknemästare behövde jobba i timmar med en beräkning som ett skolbarn idag klarar på några minuter. Varför överlevde detta system? Jo, det var nästan ingen utom de utbildade räknemästarna som kunde räkna. Därför hade dessa en hög status och viss makt. En köpman eller godsägare var beroende av sin räknemästare.

De arabiska siffrorna och algoritmerna för räkning var alltså ett hot mot en hel yrkesgrupp. Räknemästarna gjorde därför sitt bästa för att bak- tala nymodigheterna, vilket lyckades ganska bra. Under hela medelti- den och renässansen rasade en akademisk strid mellan abakisterna, som förespråkade de gamla kulramarna, och algoristerna, som förespråkade de nya algoritmerna.

Än in på 1800-talet var kulramar vanliga på det engelska finansdepar- tementet. I Frankrike förbjöds räkning med räknebrädor i skolor och i förvaltningen vid franska revolutionen. Det tog alltså mer än ett halvt millennium för Europa att ta till sig de arabiska metoderna!

11.5 Rationella och irrationella tal

För pythagoréerna var som sagt allt tal. Talen byggde upp världen och universum var alltså uppbyggt av odelbara punkter, atomer. Förhållandet mellan två sträckor måste alltså kunna uttryckas med ett *rationellt tal*. Namnet kommer av att dessa tal var tal man kunde tänka sig. Det är tal på formen

$$\frac{a}{b}.$$

Ibland kallar man dessa *bråk*.

Denna världsbild innebär att man kan införa en ny mindre enhet att mäta längderna med så att båda sträckornas längder blir heltal.

Om två sträckor från början inte båda var en multipel av samma grun- denhet, kunde man införa en ny enhet så att de blev det. Exempelvis gäller detta för två sträckor som är 1 m och 0,23 m långa. Här kan man byta enhet från meter till centimeter så att sträckorna blir 100 cm re- spektive 23 cm långa.

Någon gång ca 430 f Kr upptäckte dock Pythagoreerna att denna process inte är tillämpbar för att jämföra en sida och diagonalen i en kvadrat. Det betyder att diagonalen i en kvadrat med ett rationellt tal som sida, inte är ett rationellt tal.

Vi formulerar detta som en sats.

Sats 11.5.1. *Det finns inget rationellt tal vars kvadrat är två.*

Bevis. Detta bevis är ett motsägelsebevis. Låt oss anta att det finns en lösning som är ett rationellt tal,

$$x = \frac{a}{b}.$$

Låt oss också anta att detta är förkortat så långt det är möjligt. Med denna lösning fås

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2.$$

Detta ger att

$$a^2 = 2b^2.$$

Definition 10.2.1 ger oss att a^2 är ett jämnt tal. Vidare ger sats 10.2.3 att talet a därför också är jämnt. Återigen enligt definition 10.2.1 kan därför a skrivas som $a = 2c$ för något tal c .

Stegvis får vi alltså

$$\begin{aligned}a^2 &= 2b^2 \\(2c)^2 &= 2b^2 \\4c^2 &= 2b^2 \\2c^2 &= b^2.\end{aligned}$$

Med samma argumentation som ovan får vi att b^2 är ett jämnt tal, och därmed också talet b .

Detta motsäger vårt antagande att kvoten

$$x = \frac{a}{b}$$

är förkortad så långt det är möjligt. Detta tal kan alltså inte existera. \square

För Pythagoreerna var dessa storheter därför ojämförbara, eller *inkommensurabla storheter*. Kvoten mellan två ojämförbara storheter blir alltså ett tal man inte kan tänka sig, otänkbara tal.

Idag räknar vi naturligtvis med $\sqrt{2}$ som vilket tal som helst. Det tillhör de reella talen, vilka bland annat innehåller de rationella talen. Tal som inte är rationella benämns ibland *irrationella* tal. Det blir mer om dessa senare.

Denna upptäckt skakade om pythagoréernas världsbild. De beslöt därför att hemlighålla den. Att avslöja existensen av de irrationella talen för omvärlden bestraffades med döden, vilket också blev Hippasos öde eftersom han inte kunde hålla tyst om sin upptäckt. I vissa framställningar av historien återges denna upptäckt som något positivt som sporrade pythagoréerna till vidare studier.

12 Vår tids matematik

Föregående avsnitt visar att frågan "Vad är ett tal?" inte så lätt låter sig besvaras. Hippasos upptäckte i någon mening de rationella talen, och värre skulle det bli, även om det dröjde till början på 1800-talet. Man upptäckte vid den här tiden att det fanns en rad intressanta egenskaper som de olika typerna av tal hade. Liksom på 400-talet f Kr fanns det matematiker som trodde på de nya upptäckterna och de som inte gjorde det. Vi återkommer till detta senare.

12.1 Om att konstruera talmängder

Gud skapade de naturliga talen, resten är människans verk.

Citatet är från Leopold Kronecker (1823-1891). Det han menade var att vi måste utgå ifrån något i vårt bygge av matematiken. Vi måste utgå från att det finns naturliga tal och att vi kan addera och multiplicera dem. Däremot finns det varken additiv eller multiplikativ invers till alla naturliga tal.

Från dessa grundläggande antaganden måste vi på något sätt definiera vad som egentligen menas med de hela talen, \mathbb{Z} . Därefter måste vi definiera vad som menas med addition och multiplikation i denna talmängd. Att göra detta ligger dock lite utanför ramarna för denna text.

Steget från de hela talen till de rationella talen, \mathbb{Q} , går det däremot enklare att illustrera.

Definition 12.1.1. Mängden \mathbb{Q} utgörs av ordnade par av heltal där det andra talet inte är noll. Ett element i \mathbb{Q} tecknas antingen (a, b) eller vanligare $\frac{a}{b}$.

Räkneoperationen addition och multiplikation definieras till

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Talet 0 definieras till $\frac{0}{b}$ och talet 1 definieras till $\frac{1}{1}$.

Den additiva inversen till $\frac{a}{b}$ är $\frac{-a}{b}$ och den multiplikativa inversen är $\frac{b}{a}$.

Två rationella tal $\frac{a}{b}$ och $\frac{c}{d}$ definieras till lika om $ad = bc$.

Notera att alla definitioner endast bygger på egenskaper för de hela talen!

12.2 Uppräknelighet

12.2.1 Hela tal och rationella tal

Talmängden \mathbb{Z} innehåller som sagt både de positiva och negativa talen. En intressant frågeställning är om det finns fler heltal än naturliga tal. En första gissning är kanske att det finns ungefär dubbelt så många, men vi måste vara noggrannare än så.

De hela talen går att räkna upp. Med det menas att man kan ordna dem efter varandra på ett sådant sätt att man är säker på att få med alla, och det skall speciellt vara möjligt att peka ut vart och ett av talen. Med ett finare språk säger man att de är *uppräknliga*. Motsatsen är *överuppräknlig*.

Elementen i \mathbb{Z} kan tecknas

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots\}.$$

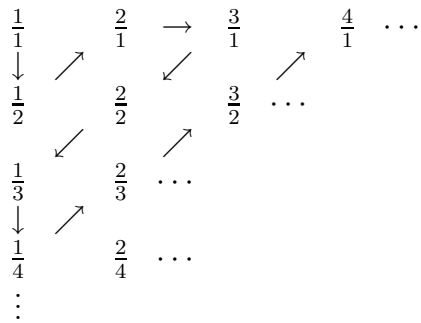
Detta är uppenbart en uppräkning av alla hela tal.

Eftersom det svarar precis ett helt tal till varje naturligt tal så måste vi dra slutsatsen att det finns lika många element i de båda mängderna. Förvisso är det oändligt många element i båda mängderna, men det är samma oändlighet. En symbol som brukar användas för denna oändlighet är \aleph_0 . Symbolen \aleph är för övrigt den första bokstaven i det hebreiska alfabetet och utläses "aleph".

Om du nu tänker på intervallet mellan 0 och 1 så inser du kanske att det där finns oändligt många rationella tal. Där finns $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{998}{1000}$ och alla de andra. Finns det fler rationella tal än hela tal? Om de finns oändligt många bara mellan 0 och 1 så kan man kanske tycka det, men så är icke fallet.

Den tyske matematikern Georg Cantor (1845 - 1918) visade att det finns lika många av varje. Han konstruerade nämligen en uppräkning av de

rationella talen enligt mönstret nedan.



På detta sätt går det att sätt fingret på (indexera) varje element i \mathbb{Q} och räkna upp dem med elementen i \mathbb{N} . Det finns alltså \aleph_0 element i \mathbb{Q} också!

12.2.2 Reella tal

De reella talen består av allt vi normalt kallar tal. Symbolen som används för att beteckna denna mängd är \mathbb{R} . Alla rationella tal är reella tal, precis som alla hela tal är rationella tal. Utöver dessa utgörs de reella talen av till exempel $\sqrt{2}$, som enligt sats 11.5.1 inte är ett rationellt tal.

De reella talen uppfyller samma algebraiska struktur som de rationella talen. De utgör med andra ord en kropp även de.

Ett rationellt tal kan uttryckas exakt med två heltal, exempelvis $1/4$ och $2/3$. För vissa av dem gäller att de går att uttrycka med ett ändligt antal decimaler. Detta gäller $1/4 = 0,75$, men inte $2/3$.

Däremot gäller att alla rationella tal får en *periodisk* decimalutveckling. Det betyder att det finns en sekvens decimaler som återkommer gång på gång i all oändlighet. För att visa detta skriver man ett streck över den sekvens som skall upprepas.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3} &= 0,33333333\dots = 0,\overline{3} \\
 \frac{56}{123} &= 0,4552845528455284552845528\dots = 0,\overline{45528}
 \end{aligned}$$

Detta gäller inte de reella tal som inte är rationella tal. De får en icke-periodisk decimalutveckling. För att särskilja de olika typerna gör vi följande definition.

Definition 12.2.1. De *irrationella talen* utgörs av alla reella tal som inte är rationella.

En märklig egenskap de reella talen har är att de i någon mening är ”fler” än de naturliga talen, de är överuppräknligt många. Detta formulerades och visades också av Cantor.

Sats 12.2.2. De reella talen är överuppräknliga.

Bevis. Antag att det finns en uppräkning som innehåller alla de reella talen, exempelvis den som återges nedan.

- 0,17897193287876764...
- 0,76575465854352343...
- 0,44231322342432438...
- 0,00000000100000100...
- ⋮

Alldeles oavsett hur denna uppräkningsprocess är kan nu alltid ett nytt reellt tal bildas, som skiljer sig från alla dessa tal. Låt det nya talet få en decimalutveckling som i n :te decimalen skiljer sig från det n :te talets n :te decimal.

Med uppräkningsprocessen ovan får alltså det nya talets första decimal inte vara 1, den andra decimalen får alltså inte vara 6, den tredje inte 2 och så vidare. Det tal som konstrueras på detta sätt kommer att skilja sig från alla tal i uppräkningsprocessen. Därför kan uppräkningsprocessen inte innehålla alla reella tal. \square

Om vi återgår till intervallet mellan 0 och 1 på tallinjen, så finns det alltså "hål" mellan alla rationella tal, medan de reella talen "fyller ut" hela tallinjen, de bildar en kontinuum.

Cantor forskade just om frågor kring oändlighetsbegreppet, och visade att det finns olika stora oändligheter. Den oändlighet som de reella talen tillhör tecknas \aleph_1 och är alltså större än den som de naturliga talen tillhör: $\aleph_0 < \aleph_1$.

En fråga som följer av detta är om det finns någon ordning av oändligheten mellan dessa två, och om man kan tänka sig högre ordningar av oändligheten än \aleph_1 . Detta lämnas som övning.

12.2.3 Transcendent och algebraiska tal

Även om de reella talen fyller ut hela tallinjen, finns det vissa av dem som skiljer ut sig.

Definition 12.2.3. En lösning till en polynomekvation med endast heltalskoefficienter är ett *algebraiskt tal*. Övriga reella tal kallas *transcendent tal*.

Exempel 12.2.4. Talet $\sqrt{2}$ är algebraiskt eftersom det är en av lösningarna till $x^2 - 2 = 0$. \blacktriangle

Det går att räkna upp alla polynomekvationer med heltalskoefficienter. Det betyder att deras lösningar också går att räkna upp. Det betyder i sin tur att de algebraiska talen är uppräkneliga.

Det ger till slut att det måste vara de transcendent talen som är överuppräkneliga. De flesta tal är alltså inte lösningen till någon ekvation!

Några transcendent tal är dock ändå mycket viktiga, till exempel är π ett transcendent tal. Detta visades först 1882 av Lindemann (1852 - 1939).

13 Bilagor

13.1 Axiom för ringar

En mängd där man kan "räkna" med elementen på det sätt man kan med rationella tal benämns *kropp*. Därför används symbolen K för den aktuella mängden. De rationella talen \mathbb{Q} och mängden av alla rationella funktioner (aktuella i Matematik C) är exempel på kroppar.

Mer precist är en kropp en mängd där det finns två räkneoperationer definierade, addition (med symbolen $+$) och multiplikation (med symbolen \cdot). För dessa räkneoperationer gäller följande.

A1 Slutenhhet: $a + b \in K$ för alla $a, b \in K$.

A2 Addition är kommutativ: $a + b = b + a$ för alla $a, b \in K$.

A3 Addition är associativ: $(a + b) + c = a + (b + c)$ för alla $a, b, c \in K$.

A4 Det finns ett element $0 \in K$ som uppfyller att $0 + a = a$ för alla $a \in K$.

A5 Till varje $a \in K$ finns ett element $-a$ med egenskapen att $a + (-a) = 0$.

M1 Slutenhhet: $a \cdot b \in K$.

M2 Multiplikation är kommutativ: $a \cdot b = b \cdot a$ för alla $a, b \in K$.

M3 Multiplikation är associativ: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ för alla $a, b \in K$.

M4 Det finns ett element $1 \neq 0 \in K$ som uppfyller $1 \cdot a = a$ för alla $a \in K$.

M5 Till varje $a \neq 0 \in K$ finns ett element a^{-1} med egenskapen att $a \cdot a^{-1} = 1$.

D1 Distributiva lagen: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ för alla $a, b, c \in K$.

Det som skiljer ringar från kroppar är alltså det sista axiomet rörande multiplikation, M5. Detta axiom garanterar att det finns en multiplikativ invers till alla element i kroppen (utom elementet 0).

Det finns ingen subtraktion definierad för elementen i en kropp. Dessutom gäller att det inte finns någon division definierad. När vi skriver a/b menar vi egentligen $a \cdot b^{-1}$.

Sakregister

- överuppräknelig, 36
- additiva inversen, 6
- aiomatiskt system, 16
- al-jabr, 33
- algebraiskt tal, 38
- algoritm, 33
- associativ, 7
- axiom, 15, 16
- deduktiv, 17
- delare, 19
- divisor, 19
- enhetselement, 7
- ental, 32
- faktor, 17
- formellt system, 16
- grupp, 8
- hundratal, 32
- induktiv, 17
- inkommensurabla storheter, 35
- irrationella tal, 35, 37
- kommutativ, 7
- kommutativ, ring, 9
- kommutativ,grupp, 8
- kropp, 10, 38
- mättat tal, 30
- meso, 12
- minsta gemensamma multipeln, 22
- multipel, 22
- multiplicitet, 18
- multiplikativ invers, 7
- naturliga talen, 5
- omättat tal, 30
- påstående, 16
- perfekt tal, 29
- postulat, 16
- printal, 17
- pythagoréisk trippel, 28
- rationella tal, 34
- relativt prima, 23
- ring, 9
- sats, 16
- satser, 14
- sluten, 7
- störsts gemensamma delaren, 21
- stambråk, 12
- svagt mättat tal, 30
- svagt omättat, 30
- teorem, 16
- tiotal, 32
- transcendentta tal, 38
- uppräknelig, 36
- vänskapliga, 30