



1 Inledning

Ekvationer av typen $x^4 + px^2 + q = 0$ går att lösa genom att göra ett variabelbyte $t = x^2$ varefter ekvationen $t^2 + pt + q = 0$ fås. Positiva rötter till denna ger lösningar till den ursprungliga ekvationen enligt $x_{1,2} = \pm\sqrt{t}$.

Lösningssättet beskrivet ovan är normalt kursinnehåll i Matematik C, däremot sägs sällan speciellt mycket om hur detta samspelar med faktoriseringen av motsvarande polynom och grafen till motsvarande funktion. I denna text beskrivs en övning som förhoppningsvis leder till fördjupad kunskap om detta.

2 Övning

Övningen liknar Mikroövningen och Megaövningen till sin utformning. Därför förklaras inte alla steg så ingående som i dessa fall. Övningen täcker fem fall som ges i första steget. Du skall genomföra alla steg för alla fem fall.

1. Bilda en polynomfunktion $f(x)$ av grad fyra som har följande egenskaper:
 - (a) Fyra nollställen som parvis ligger lika långt från origo. Det får du genom att välja fyra faktorer av grad ett enligt mönstret $(x - a)(x + a)(x - b)(x + b)$.
 - (b) Två linjära nollställen. Det får du genom att välja två faktorer av grad ett enligt mönstret $(x - a)(x + a)$ och ett irreducibelt polynom av grad två på formen $x^2 + b$.
 - (c) Två kvadratiske nollställen som ligger lika långt från origo. Det får du genom att välja två faktorer av grad ett med multiplicitet två enligt mönstret $(x - a)^2(x + a)^2$.
 - (d) Två linjära nollställen som ligger lika långt ifrån varandra samt ett kvadratisk nollställe i origo. Det får du genom att välja tre faktorer av grad ett varav ett har multiplicitet två enligt mönstret $(x - a)(x + a)x^2$.
 - (e) Inga nollställen. Här måste du fundera ut ett sätt att konstruera ett irreducibelt polynom av grad fyra på formen $x^4 + px^2 + p$.
2. Skriv polynomfunktionen på polynomform.
3. Lös ekvationen $f(x) = 0$ genom att använda tekniken att införa ett variabelbyte $t = x^2$.

4. Din hjälpekvation kommer antingen ha två, en eller ingen lösning. Notera hur detta hänger ihop med faktoriseringen av det ursprungliga polynomet
5. Rita kurvan $y = f(x)$. För att denna skall bli tydlig, måste du kanske införa en konstant $0 < k < 1$ för att krympa grafen i y -led.
6. Rita kurvan $y = f(t)$ i samma koordinatsystem. Notera hur nollställena till de båda kurvorna hänger ihop.

3 Fördjupning

Fundera över följande:

1. I det fall där du valde ett polynom som har två faktorer av grad ett och ett irreducibelt av grad två, varför kunde du inte välja det irreducibla på formen $(x + a)^2 + b$ där $b > 0$ och $a \neq 0$?
2. Att lösa en generell fjärdegradsekvation är inte lätt (med det finns en lång och krånglig lösningformel). Denna övning är koncentrerad till fallet $x^4 + px^2 + q = 0$ som har egenskapen att nollställena parvis befinner sig lika långt från origo (om en dubbelrot $x = 0$ räknas två gånger).
Hur blir det i fallet med fyra nollställen som parvis befinner sig lika långt från en annan punkt? Försök hitta på ett sätt att lösa en sådan. Exempelvis kan du försöka lösa ekvationen $x^4 - 12x^3 + 49x^2 - 78x + 40 = 0$.
Försök först och främst resonera om en metod innan du ger dig i kast med algebran.
3. Alla fall vi hittills berört har varit fall där kurvan har en symmetrilinje. Kan du skriva upp ett polynom på faktorform vars graf inte är symmetrisk?
4. Vi har också hittills bara berört fall där koefficienten framför x^4 är 1. Hur blir det om den är -1 ? Hur inverkar det på ekvationen i t ?

4 Redovisning

Alla fem fall utför och redovisas skriftligt. Tankar (allt från lösa resonemang och gissningar till korrekta slutsatser) om fördjupningsfrågorna redovisas också skriftligt.

Lycka till!