



**EUROPASKOLAN
STRÄNGNÄS**

Differentialekvationer

Fördjupad teori och tillämpningar

Johan Wild

2007-09-18

Innehåll

Innehåll.....	2
1 Inledning.....	3
2 Viskös dämpning.....	4
3 Ofta förekommande situationer.....	5
3.1 Problemsituationer.....	5
3.2 Matematisk lösning.....	5
3.3 Fysikalisk lösning.....	6
3.3.1 Fritt fall i visköst motstånd.....	6
3.3.2 Maxima och Gnuplot.....	8
3.3.3 Förändring av en kropps temperatur.....	10
4 Integrerande faktor.....	11
4.1 Problemsituation med normal lösningsmetod.....	11
4.2 Metod med integrerande faktor.....	12
4.2.1 Fall 1.....	12
4.2.2 Fall 2.....	13
4.2.3 Mer avancerade ekvationer.....	13
5 Homogena linjära ordinära differentialekvationer av andra ordningen med konstanta reella koefficienter.....	14
5.1 Lösningen.....	14
5.2 Fallet med komplexa rötter.....	15
5.3 Lathund.....	16
6 Exempel.....	17
6.1 Enkelt exempel.....	17
6.2 Odämpad svängning.....	17
6.3 Visköst dämpad svängning.....	18
6.3.1 Svag dämpning.....	19
6.3.2 Stark dämpning.....	19
6.3.3 Kritisk dämpning.....	19
6.3.4 Exempel.....	20
6.3.5 Maxima och Gnuplot.....	21

1 Inledning

Denna text har följande syften.

1. Säga några ord om viskös dämpning eftersom så många viktiga exempel kräver viss förståelse om detta.
2. I detalj härleda lösningen till $y' + ay = k$ samt diskutera tolkningar av de situationer den beskriver.
3. Introducera begreppet integrerande faktor och lösa den inhomogena differentialekvationen $y' + ay = e^{ay}$.
4. I detalj härleda lösningen till $y'' + py' + qy = 0$.
5. I detalj gå igenom några exempel på tillämpningar av denna.

Denna text är *inte* en introduktion till differentialekvationer.

2 Viskös dämpning

Flera exempel i denna text kommer att behandla situationer där de finns en kraft som liknar det vi kallar "luftmotstånd". För att göra språket mer generellt kan vi inte skriva "luft" då det handlar om gaser generellt. Motståndet behöver inte ens vara en gas, situationen kan vara att något faller fritt i till exempel vatten eller annan vätska.

Ett ord som omfattar motstånd i alla gaser och vätskor är visköst motstånd. Jämför med ordet för att beskriva hur lätt flytande mediet är, viskositet.

Det finns olika matematiska modeller för den dämpande kraften som beskriver olika situationer olika bra.

Om kroppens rörelse genom mediet är långsam (jämför med mediets viskositet) brukar man sätta den dämpande kraften (det viskösa motståndet) proportionell mot kroppens hastighet, $F_v = -bs'$, där b är en konstant som bland annat beror av både mediets viskositet och kroppens form.

För högre hastigheter blir det turbulens bakom föremålet, varför $F_v = -b(s')^2$ är mer relevant. I det senare fallet blir differentialekvationen som beskriver kroppens rörelse icke-linjär. Teori för detta har inte tagits upp här, varför vi koncentrerar oss på det enklare fallet.

3 Ofta förekommande situationer

3.1 Problemsituationer

Väldigt ofta stöter man på situationer som kan beskrivas med differentialekvationer av typen

$$(1) \quad y' + ay = k$$

där a och k är konstanter. Det finns två huvudtolkningar. Den ena är där förändringen y' är proportionell mot skillnaden mellan y och någon konstant. Exempel på detta är till exempel förändringen av en kropps temperatur (y'), som är proportionell mot skillnaden av kroppens temperatur (y) och temperaturen i det rum där kroppen förvaras (konstanten).

Den andra huvudtolkningen är där y' är summan av en andel av y samt en konstant. Ett exempel på detta är fritt fall under visköst motstånd, där hastighetens förändring (v') är summan av det viskösa motståndet (en andel av hastigheten v) och en konstant (jordens dragningskraft).

Newtons andra lag för denna situation ger nämligen

$$(2) \quad F = ma$$

$$(3) \quad mg - bv = mv'$$

som förenklas till

$$(4) \quad v' = g - \frac{b}{m}v.$$

Ett annat exempel problem som ibland går under namnet blandningsproblem. Där är situationen att förekomsten av ett ämne i ett kärl dels förändras genom ett utflöde som är proportionellt mot förekomsten av ämnet, samt ett konstant inföde.

Schematiskt fås

$$(5) \quad y' = IN - UT$$

där termen IN ofta ges av ett viss mängd per tidsenhet och termen UT ges av ett utflöde proportionellt mot koncentrationen av y i kärlet. Vi återkommer till dessa exempel senare.

3.2 Matematisk lösning

Differentialekvationen (1) har homogenlösningen $y_h = Ce^{-ax}$. Den partikulärlösning som svarar mot högerledet är en konstant, $y_p = A$. Insättning av y_p i (1) ger

$$(6) \quad 0 + aA = k$$

vilket ger

$$(7) \quad A = \frac{k}{a}$$

och därmed

$$(8) \quad y_p = \frac{k}{a}$$

och

$$(9) \quad y = y_h + y_p = Ce^{-ax} + \frac{k}{a}.$$

Ett initialvillkor $y(0) = y_0$ gör det möjligt att bestämma C . Insättning ger

$$(10) \quad y(0) = Ce^{-a \cdot 0} + \frac{k}{a} = y_0$$

vilket ger

$$(11) \quad C = y_0 - \frac{k}{a},$$

och

$$(12) \quad y(x) = \left(y_0 - \frac{k}{a} \right) e^{-ax} + \frac{k}{a}.$$

Detta uttryck skall vi senare jämföra med vad vi får om vi resonerar oss fram till lösningar med hjälp av vår fysikaliska intuition.

3.3 Fysikalisk lösning

3.3.1 Fritt fall i visköst motstånd

Låt oss återgå till exemplet med fritt fall med visköst motstånd. Vi tänker oss först att vi släpper föremålet så att dess utgångshastighet är noll. Just då kommer även det viskösa motståndet att vara noll. Jordens dragningskraft accelererar föremålet så att hastigheten ökar, och med den det viskösa motståndet. Förr eller senare kommer farten att bli så stor att det viskösa motståndet precis balanserar dragningskraften.

Därefter kommer inte kroppens fart ändras eftersom nettokraften på föremålet är noll. Då detta inträffat är alltså v' noll. Den hastighet föremålet har då kallar vi för jämviktshastigheten v_j . Uttryckt som en ekvation blir (4) i denna situation

$$(13) \quad 0 = g - \frac{b}{m} v_j.$$

Ur detta löser vi ut jämviktshastigheten och får

$$(14) \quad v_j = \frac{gm}{b}.$$

Om initialvillkoret är att kroppens hastighet är noll,

$$(15) \quad v(0) = 0,$$

känns det rimligt att teckna hastigheten så att den kommer att öka exponentiellt mot v_j .
Genom att snegla på den matematiska lösningen inser man att exponenten måste innehålla faktorn b/m . Vi får

$$(16) \quad v(t) = \frac{gm}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right).$$

Låt oss jämföra detta med den matematiska lösningen. Jämförs (1) och (4), (12) och (16) samt initialvillkoren inser man att variablerna svarar mot varandra som

$$y \leftrightarrow v$$

$$x \leftrightarrow t$$

$$a \leftrightarrow b/m$$

$$k \leftrightarrow g$$

$$y_0 \leftrightarrow 0.$$

Vi ser också att lösningen är densamma. Vill man ha ett uttryck för kroppens läge s måste (16) integreras. Med initialvillkoret

$$(17) \quad s(0) = 0$$

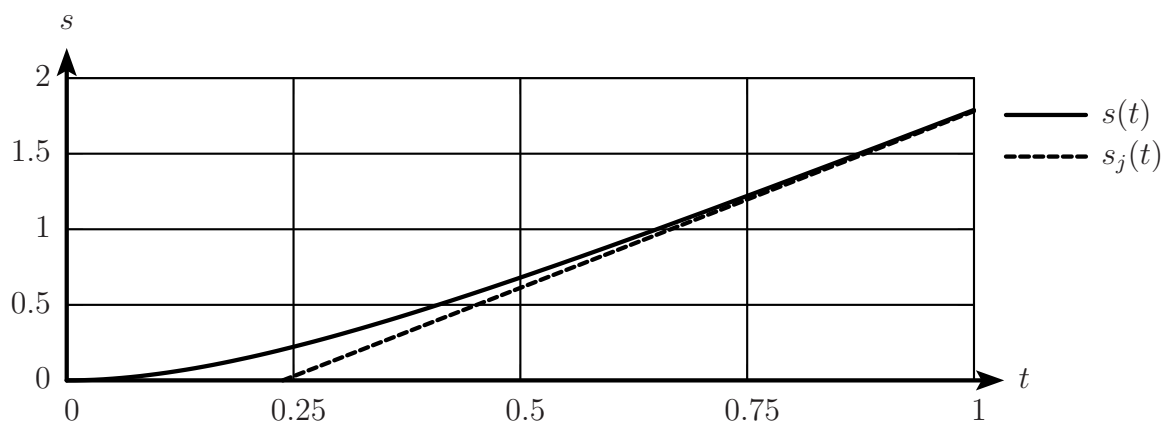
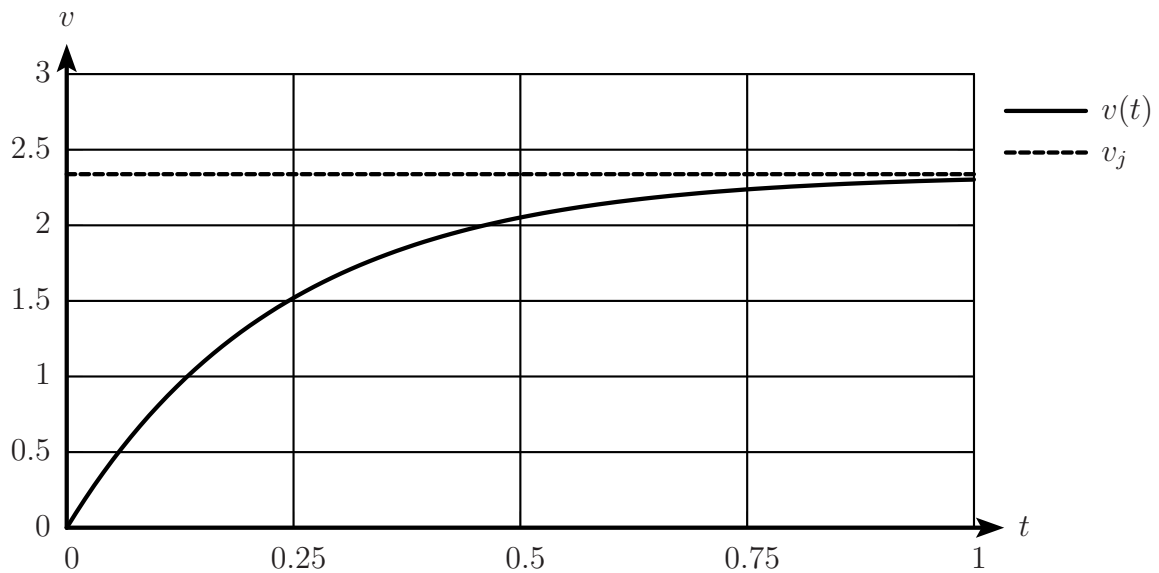
fås

$$(18) \quad s(t) = \frac{gm}{b} \left(t + \frac{m}{b} e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{m}{b} \right).$$

Vi ser att denna funktion asymptotiskt kommer att närma sig

$$(19) \quad s_j(t) = v_j t - \frac{gm^2}{b^2}.$$

Följande bilder visar dessa grafer då $m = 0,1$ kg, $g = 9,82$ kg m/s² och $b = 0,42$ kg/s.



3.3.2 Maxima och Gnuplot

Nedan följer ett script som löser (3) med initialvillkoren (15) och (17).

```

/*
  Lösningar till
   $mv' = mg - bv$ 
  där
  v    kroppens hastighet [m]
  b>0  dämpning [kg/s]
  t    tid [s]
  v0   hastighet då t=0 [m/s]
  m    massa [kg]
  g    jordaccelerationen [kg m / s^2]
*/

kill(all);

depends(v,t);
assume(b>0);

DE:m*diff(v,t)=m*g-b*v;

LDE:ode2(DE,v,t);

LIC:ic1(LDE,t=0,v=v0);

/*
  Integrering för att få sträckan som funktion av tiden.
  s    kroppens läge [m]
  s0   kroppens läge så t=0 [m]

```

```

*/

v:rhs(LIC);
s:integrate(v,t)+C;

/*
  Med initialvilkoren
    s0=0
    v0=0
  fås
*/

C:rhs(solve(s=s0,C)[1]); /* Lös ut C ur s */
/* C beror nu av s0, v0 och t. */
C:C,s0=0,v0=0,t=0; /* C får nu rätt värde. */

v,v0=0;
s,v0=0,s0=0,C=C; /* s innehåller sedan tidigare ett C,
/* som måste sättas till det nya C. */

```

Graferna ovan är huvudsakligen genererade med följande Gnuplotscript.

```

# Lösningar till
#  $mv' = mg - bv$ 
# där
# v kroppens hastighet [m]
#  $b > 0$  dämpning [kg/s]
# t tid [s]
#  $v_0 = 0$  hastighet då  $t = 0$  [m/s]
# m massa [kg]
# g jordaccelerationen [kg m / s2]
# s kroppens läge [m]
#  $s_0 = 0$  kroppens läge så  $t = 0$  [m]

reset

m=0.1
g=9.82
b=0.42

v(t)=g*m/b*(1-exp(-b/m*t))
v_j=g*m/b
s(t)=g*m/b*(t+m/b*exp(-b/m*t)-m/b)
s_j(t)=v_j*t-g*m**2/b**2

set multiplot
set origin 0,0.5
set size 1, 0.5

set xrange[0:1]
set yrange[0:3]

plot v(x) title 'v(t)' lt 1 , v_j title 'v_j' lt 2

set xrange[0:1]
set yrange[0:2]

set origin 0,0
set size 1, 0.5

plot s(x) title 's(t)' lt 1 , s_j(x) title 's_j(t)' lt 2

unset multiplot

```

3.3.3 Förändring av en kropps temperatur

Vi återgår till exemplet där temperaturen förändras. Låt här T vara kroppens temperatur, t tiden, T_R vara rummets temperatur och T_0 vara kroppens initialtemperatur. Differentialekvationen som beskriver förändringen av T med tiden blir då

$$(20) \quad T' = \alpha(T - T_R)$$

där α är en konstant.

Vår känsla för den fysikaliska situationen leder oss till att postulera lösningen

$$(21) \quad T(t) = (T_0 - T_R)e^{-\alpha t} + T_R$$

vilken innebär att temperaturen avtar exponentiellt mot rummets temperatur, antingen uppifrån eller nedifrån.

4 Integrerande faktor

I detta avsnitt skall vi se att det finns en inhomogen differentialekvation där lösningsmetoden genom att konstruera en partikulärlösning och en homogenlösning separat inte fungerar. Därefter skall vi gå igenom en annan lösningsmetod som är lite mer abstrakt, men som både klarar det fall där den första lösningsmetoden inte fungerar och som är mer generell.

4.1 Problemsituation med normal lösningsmetod

Differentialekvationen

$$(22) \quad y' - ay = 0$$

har lösningen den allmänna lösningen

$$(23) \quad y = Ce^{ax}.$$

Det finns flera sätt att härleda detta. Enklast är att skriva om differentialekvationen på formen $y' = ay$ och fråga sig vilken funktion som har egenskapen att dess derivata är en konstant gånger funktionen själv.

Den inhomogena differentialekvationen

$$(24) \quad y' - ay = Ae^{rx},$$

där A är en *given* konstant, löses genom att dels konstruera den homogena lösningen

$$(25) \quad y_h = Ce^{ax},$$

där C är en *obekant* konstant, dels att ansätta en partikulärlösning av samma typ som högerledet,

$$(26) \quad y_p = C_0 e^{rx}.$$

Partikulärlösningen (26) sätts in i (24). Då erhålles

$$(27) \quad rC_0 e^{rx} - aC_0 e^{rx} = Ae^{rx}.$$

Faktorn C_0 kan nu relateras till A genom att denna löses ut ur (27):

$$(28) \quad C_0 = \frac{A}{r-a}.$$

Detta sätt att lösa differentialekvationer av samma typ som (24) fungerar inte om $r = a$, eftersom det då blir en division med noll i (28). Däremot finns en annan lösningsmetod, som snart skall tas upp, först skall vi bara slutföra lösandet av (24). Den totala lösningen blir

$$(29) \quad y = y_h + y_p = C_1 e^{ax} + \frac{A}{r-a} e^{rx}.$$

4.2 Metod med integrerande faktor

Vi behandlar först det homogena fallet, men formulerar först om (22) till

$$(30) \quad Dy - ay = 0.$$

Nu multiplicerar vi (30) med e^{-ax} . Denna faktor är kallas den *integrerande faktorn* till (30). Varför den kallas så kommer att bli tydligt snart. Hur som helst fås

$$(31) \quad Dye^{-ax} - aye^{-ax} = 0.$$

Det fina är att detta går att formulera om till

$$(32) \quad Dye^{-ax} + yDe^{-ax} = 0.$$

Termerna i vänsterledet går nu återigen att skriva om genom att tillämpa produktregeln baklänges. Vi får då

$$(33) \quad D(ye^{-ax}) = 0.$$

Om vi nu integrerar båda led får vi

$$(34) \quad ye^{-ax} = C,$$

där C är en obekant konstant. Det är detta steg som motiverar namnet integrerande faktor. Genom att multiplicera med e^{-ax} blev det möjligt att integrerar båda led.

Nu kan vi lösa ut y och får då naturligtvis samma lösning som vi fick förut:

$$(35) \quad y = Ce^{ax}.$$

Det fina med denna metod visar sig i det inhomogena fallet (24). Om denna skrivs om enligt samma mönster fås

$$(36) \quad Dy - ay = Ae^{rx}$$

$$(37) \quad Dye^{-ax} - aye^{-ax} = Ae^{rx}e^{-ax} \quad \text{Multiplikering med integrerande faktor } e^{-ax}.$$

$$(38) \quad D(ye^{-ax}) = Ae^{(r-a)x}$$

Nu kan vi behandla både fallet $r \neq a$ och $r = a$. Vi börjar med det första för att se att vi får det vi fick förut.

4.2.1 Fall 1

Integreras nu (38) fås

$$(39) \quad ye^{-ax} = \frac{A}{r-a} e^{(r-a)x} + C_1$$

där C_1 är en obekant konstant. Ur detta löser vi ut y och får

$$(40) \quad y = \frac{A}{r-a} e^{rx} + C_1 e^{ax}.$$

4.2.2 Fall 2

Om $r = a$ blir högerledet i (38) en konstant:

$$(41) \quad D\left(ye^{-ax}\right) = A.$$

Integrering av båda led ger då

$$(42) \quad ye^{-ax} = Ax + K,$$

där K är en konstant som kan bestämmas med randvillkor om sådana finns. Löser vi ut y får vi

$$(43) \quad y = e^{ax} (Ax + K).$$

Detta är alltså en lösning som inte går att få fram med metoden att studera den homogena lösningen och att till denna lägga en lämplig partikulärlösning.

4.2.3 Mer avancerade ekvationer

En lite mer avancerad homogen differentialekvation av ordning ett är

$$(44) \quad y' + g(x)y = 0.$$

Även denna kan lösas genom att multiplicera med en integrerande faktor. Om man multiplicerar med $e^{G(x)}$ där $G(x)$ är primitiv funktion till $g(x)$ kan vi på samma sätt som förut lösa ekvationen:

$$(45) \quad Dye^{G(x)} + g(x)ye^{G(x)} = 0$$

$$(46) \quad D\left(ye^{G(x)}\right) = 0$$

$$(47) \quad ye^{G(x)} = C$$

$$(48) \quad y = Ce^{-G(x)}$$

Observera att i vårt tidigare enkla exempel var $g(x) = -a$, vars primitiva funktion är $G(x) = -ax$.

Det värsta man kan råka ut för är det inhomogena fallet

$$(49) \quad y' + g(x)y = h(x).$$

Med samma metod fås

$$(50) \quad Dye^{G(x)} + g(x)ye^{G(x)} = h(x)e^{G(x)},$$

$$(51) \quad D\left(ye^{G(x)}\right) = h(x)e^{G(x)},$$

$$(52) \quad ye^{G(x)} = \int h(x)e^{G(x)} dx + C,$$

$$(53) \quad y = e^{-G(x)} \int h(x)e^{G(x)} dx + Ce^{-G(x)}.$$

I det allmänna fallet kan man naturligtvis råka ut för att integralen i (53) blir lite krånglig.

5 Homogena linjära ordinära differentialekvationer av andra ordningen med konstanta reella koefficienter

Rubriken antyder att vi nu skall studera något väldigt avancerat. Så är dock inte fallet. Att en differentialekvation är homogen betyder att högerledet är noll, precis som förut. Att den är linjär betyder att det inte får finnas med termer av typen $(y')^2$. Jämför detta med fallet att funktioner med termer av typen x^2 inte är linjära. Ordet ordinära betyder att det bara är frågan om funktioner av en variabel. Ordning två att det nu får finnas med andraderivator. Slutligen betyder konstanta reella koefficienter att koefficienterna framför y' och y inte är funktioner av x , utan reella tal.

5.1 Lösningen

Det som blir kvar av allt detta är ett uttryck på formen

$$(54) \quad y'' + py' + qy = 0.$$

Denna differentialekvation skall nu lösas. Det går till så att vi först byter skrivsätt till

$$(55) \quad D^2 y + pDy + qy = 0.$$

I vänsterledet bryts nu y ut, precis som om det var en faktor. Då fås

$$(56) \quad (D^2 + pD + q)y = 0.$$

Ett finare namn på uttrycket i parenteserna är att det är en *differentialoperator*. En operator är ett slags funktion som tar en funktion som argument och gör en ny funktion av den. Att derivera är till exempel en operator. I (56), liksom i fallet med en enkel derivering, består operatören endast av att derivera, därav namnet differentialoperator.

Differentialoperatören i (56) liknar ett polynom av grad två. Liksom andra polynom av grad två går även detta att faktorisera till

$$(57) \quad (D - r_1)(D - r_2)y = 0,$$

där r_1 och r_2 är rötter till den karakteristiska ekvationen till differentialekvationen (54).

$$(58) \quad r^2 + pr + q = 0.$$

Observera att rötterna r_1 och r_2 mycket väl kan vara komplexa!

Nu gör vi ett variabelbyte för att lösa (57) ”faktor för faktor”. Vi definierar

$$(59) \quad (D - r_2)y = g.$$

Då blir (57)

$$(60) \quad (D - r_1)g = 0.$$

Detta är en homogen differentialekvation av ordning ett, vars lösning är

$$(61) \quad g = C_0 e^{r_1 x}.$$

Att namnet på den obekanta konstanten C_0 är valt med index 0, beror på att vi senare kommer att snygga till den slutliga lösningen, och då vill vi inte att namnet C_1 skall vara upptaget.

Med (61) insatt i (59) fås en inhomogen differentialekvation av ordning ett,

$$(62) \quad (D - r_2)y = C_0 e^{r_1 x}.$$

Detta är precis samma sorts ekvation som (36), som alltså har lösningen

$$(63) \quad y = \frac{C_0}{r_1 - r_2} e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

då den karakteristiska ekvationen (58) har två olika rötter. Observera att i (40) är A en *given* konstant. Motsvarande konstant C_0 här är dock en obekant integrationskonstant, som kom från lösandet av (60). Därför kan vi sätta

$$(64) \quad C_1 = \frac{C_0}{r - a}$$

för att snygga till (63) lite. Slutligen fås

$$(65) \quad y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

Då den karakteristiska ekvationen har en dubbelrot $r = r_1 = r_2$ fås lösningen

$$(66) \quad y = e^{rx} (C_0 x + K).$$

5.2 Fallet med komplexa rötter

Nu har vi klarat av själva lösandet av differentialekvationen. Det finns däremot lite till att säga om det fall då den karakteristiska ekvationen har komplexa rötter.

Eftersom vi bara har behandlat fallet då koefficienterna är reella, kan vi dra slutsatsen att de två rötterna r_1 och r_2 måste vara varandras komplexkonjugat. Det betyder att de kan skrivas på formen

$$(67) \quad r_1 = \alpha + i\beta$$

respektive

$$(68) \quad r_2 = \alpha - i\beta.$$

Om dessa sätts in i (63) fås

$$(69) \quad y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Detta kan förenklas till

$$(70) \quad y = e^{\alpha x} (C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}),$$

$$(71) \quad y = e^{\alpha x} (C_1 (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) + C_2 (\cos(-\beta x) + i \sin(-\beta x))),$$

$$(72) \quad y = e^{\alpha x} (C_1 (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) + C_2 (\cos(\beta x) - i \sin(\beta x))),$$

$$(73) \quad y = e^{\alpha x} \left((C_1 + C_2) \cos(\beta x) + i(C_1 - C_2) \sin(\beta x) \right).$$

Minns att konstanterna C_1 och C_2 är obekanta (till dess vi får randvillkor som gör att vi kan bestämma dem). Det finns inget som hindrar att vi inför nya konstanter

$$(74) \quad A = C_1 + C_2$$

och

$$(75) \quad B = i(C_1 - C_2)$$

så att vi får en lite snyggare lösning

$$(76) \quad y = e^{\alpha x} \left(A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) \right).$$

5.3 Lathund

All teori ovan har inte varit av det enklaste slaget. Begreppet integrerande faktor brukar tillhöra överkursen i Matematik E. Dessutom har vi blandat in nästan allt Matematik E har att erbjuda: Komplexa tal, dess tillämpning inom polynomteori samt differentialekvationer. I praktiken måste man inte gå igenom allt detta för att kunna lösa problem. Istället följer man dessa punkter.

1. Skriv differentialekvationen på formen $y'' + py' + qy = 0$.
2. Lös den karakteristiska ekvationen $r^2 + pr + q = 0$.
3. Om rötterna är olika och reella, r_1 och r_2 , är lösningen $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.
4. Om det blir en dubbelrot r är lösningen $y = e^{rx} (Cx + K)$.
5. Om rötterna är komplexa, med realdelar α och imaginärdelar β respektive $-\beta$, är lösningen $y = e^{\alpha x} (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x))$.
6. Finns randvillkor kan man bestämma konstanterna C_1 och C_2 , C och K , respektive A och B .

Det är allt!

6 Exempel

6.1 Enkelt exempel

Lös differentialekvationen $y'' + y' - 6y = 0$, med randvillkoren $y(0) = 3$ och $y'(0) = -2$.

Lösning

Denna ekvation har en karakteristisk ekvation $r^2 + r - 6 = 0$. Den har lösningarna $r_1 = 2$ och $r_2 = -3$. Därför är $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$, vars förstaderivata är $y' = 2C_1 e^{2x} - 3C_2 e^{-3x}$.

Randvillkoren ger $y(0) = C_1 + C_2 = 3$ samt $y'(0) = 2C_1 - 3C_2 = -2$. Vi får alltså ekvationssystemet

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ 2C_1 - 3C_2 = -2 \end{cases}$$

vars lösning är

$$\begin{cases} C_1 = \frac{7}{5} \\ C_2 = \frac{8}{5} \end{cases}$$

Den slutliga lösningen är alltså $y = \frac{7}{5} e^{2x} - \frac{8}{5} e^{-3x}$.

6.2 Odämpad svängning

En kropp som är fäst vid en fjäder svänger som bekant kring sitt jämviktsläge. Låt s vara kroppens läge mätt från jämviktsläget. Den enda kraft F_H som verkar på kroppen är den från fjädern, $F_H = -ks$ (Hookes lag), där k är fjäderkonstanten för den aktuella fjädern.

Newtons andra lag $F_H = ma$, där $a \equiv \frac{d^2 s}{dt^2} \equiv s''$ är kroppens acceleration och m dess massa,

leder oss till att teckna differentialekvationen

$$(77) \quad m \frac{d^2 s}{dt^2} = -ks.$$

På standardform blir detta

$$(78) \quad s'' + \frac{k}{m} s = 0.$$

Den karakteristiska ekvationen blir

$$(79) \quad r^2 + \frac{k}{m} = 0,$$

vars lösningar är de två komplexa talen

$$(80) \quad r_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Notera att lösningarna blir rent imaginära. I detta sammanhang brukar man definiera

$$(81) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Den allmänna lösningen till (77) blir då

$$(82) \quad s(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t.$$

Om vi inför begynnelsevillkoret

$$(83) \quad \begin{cases} s(0) = s_0 \\ s'(0) = 0 \end{cases}$$

fås

$$(84) \quad s(t) = s_0 \cos \omega_0 t.$$

Notera att ω_0 är svängningens vinkelfrekvens och s_0 är dess amplitud. Eftersom det inte finns någon dämpande kraft kommer svängningen att fortgå med konstant amplitud i det oändliga.

Jämför även (81) med din intuitiva uppfattning om svängningar som dessa. Om massan för kroppen är stor blir vinkelfrekvensen liten och vice versa. Om däremot fjäderkonstanten är stor blir även vinkelfrekvensen.

6.3 Visköst dämpad svängning

Med en dämpande kraft från det viskösa mediet $F_v = -bs'$ fås en term till i differentialekvationen. Vi får

$$(85) \quad m \frac{d^2 s}{dt^2} = -ks - bs'.$$

På standardform blir detta

$$(86) \quad s'' + \frac{b}{m} s' + \frac{k}{m} s = 0.$$

Den karakteristiska ekvationen blir

$$(87) \quad r^2 + \frac{b}{m} r + \frac{k}{m} = 0,$$

vars lösningar är

$$(88) \quad r_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}.$$

Beroende på hur stor dämpningen är jämfört med fjäderkonstanten och kroppens massa måste vi behandla tre fall.

6.3.1 Svag dämpning

Om dämpningen är liten, $b^2 < 4km$, förväntar vi oss att få en svängning där amplituden avtar med tiden. I detta fall blir lösningarna (88) komplexa, men inte rent imaginära. Lösningarna skrivs lämpligen

$$(89) \quad r_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{-\left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right)} = -\frac{b}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}.$$

Även i detta fall är det praktiskt att definiera

$$(90) \quad \omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}.$$

Den allmänna lösningen till (85) blir då

$$(91) \quad s(t) = e^{-\frac{bt}{2m}} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t).$$

Med begynnelsevillkoret

$$(92) \quad \begin{cases} s(0) = s_0 \\ s'(0) = 0 \end{cases}$$

Fås

$$(93) \quad s(t) = s_0 e^{-\frac{bt}{2m}} \left(\cos \omega_d t + \frac{b}{2m\omega_d} \sin \omega_d t \right).$$

Vi ser alltså att vi får en svängande rörelse med exponentiellt avtagande amplitud. Även vinkelfrekvensen (90) ändras (minskar) jämfört med det odämpade fallet.

6.3.2 Stark dämpning

I detta fall förväntar vi oss att kroppen kommer att sega sig mot jämviktsläget. Ju större dämpningen är, desto längre tid kommer det att ta innan kroppen hinner fram. I detta fall gäller

$$(94) \quad b^2 > 4km$$

och den allmänna lösningen till (85) blir

$$(95) \quad s(t) = Ae^{\left(-\frac{b}{2m} + \sqrt{\frac{b^2}{4m} - \frac{k}{m}}\right)t} + Be^{\left(-\frac{b}{2m} - \sqrt{\frac{b^2}{4m} - \frac{k}{m}}\right)t}.$$

Begynnelsevillkoret (92) ger

$$(96) \quad s(t) = s_0 \left(\sqrt{b^2 - 4km} + b \right) e^{\left(-\frac{b}{2m} + \sqrt{\frac{b^2}{4m} - \frac{k}{m}}\right)t} + s_0 \left(\sqrt{b^2 - 4km} - b \right) e^{\left(-\frac{b}{2m} - \sqrt{\frac{b^2}{4m} - \frac{k}{m}}\right)t}.$$

6.3.3 Kritisk dämpning

Om dämpningen är precis så att $b^2 = 4km$ fås en dubbelrot

$$(97) \quad r = \frac{-b}{2m}$$

och den allmänna lösningen blir

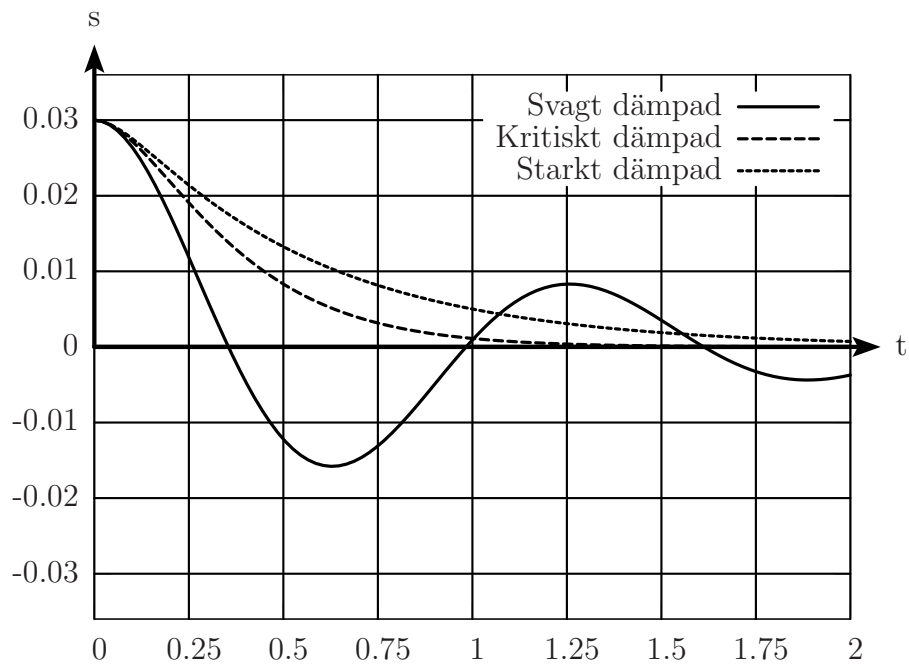
$$(98) \quad s(t) = (At + B)e^{-\frac{bt}{2m}}.$$

Begynnelsevillkoret (92) ger

$$(99) \quad s(t) = \left(\frac{s_0 b}{2m} t + s_0 \right) e^{-\frac{bt}{2m}}.$$

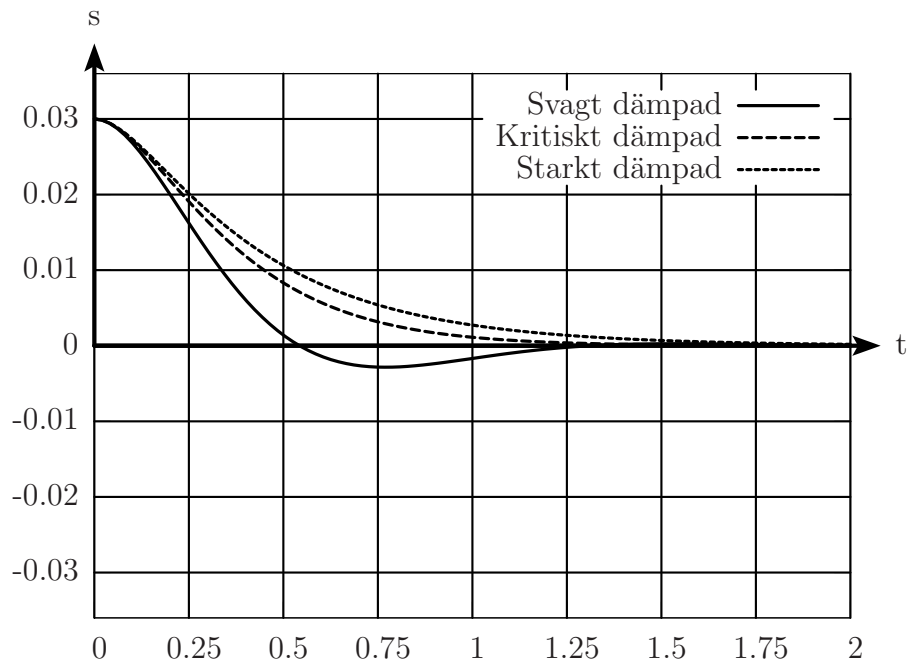
6.3.4 Exempel

Låt $m = 0.1$ kg, $s_0 = 0.03$ m och $k = 2,6$ N/m. Definiera $b_{\text{Kritisk}}^2 = 4km$. För olika värden på b fås då grafer som i figurerna nedan.



$$b_{\text{Starkt dämpad}} = 1,5 \cdot b_{\text{Kritisk}}$$

$$b_{\text{Svagt dämpad}} = 0,2 \cdot b_{\text{Kritisk}}$$



$$b_{\text{Starkt dämpad}} = 1,2 \cdot b_{\text{Kritisk}}$$

$$b_{\text{Svagt dämpad}} = 0,6 \cdot b_{\text{Kritisk}}$$

6.3.5 Maxima och Gnuplot

Nedan följer ett Maxima-script för att lösa (85) med initialvillkoret (92).

```

/*
  Lösningar till
  ms''=-bs'-ks
  där
  s    utslag från jämviktssläge [m]
  b>0 dämpning [kg/s]
  k>0 fjäderkonstant [N/m]
  t    tid [s]
  s0   utslag då t=0 [m]
  m    massa [kg]
*/

depends(s,t);

assume(4*m*k>b^2);          /* Svagt dämpad */
/*assume(equal(4*m*k,b^2)); /* Kritisk dämpad */
/*assume(4*m*k<b^2);       /* Starkt dämpad */

DE:m*diff(s,t,2)=-b*diff(s,t)-k*s;

LDE:ode2(DE,s,t);

LIC:ic2(LDE,t=0,s=s0,diff(s,t)=0);

```

Maxima klarar inte av de tre fallen samtidigt. Det krävs att man definierar vilket som är störst av b^2 och $4km$ med kommandot `assume`. Om de är lika måste detta göras med kommandot `equal`.

Om man vill rita de tre fallen i samma graf är det enklast att lösa problemet med Maxima (eller för hand), och använda Gnuplot för att rita kurvorna.

Graferna ovan är huvudsakligen genererade med följande script. Det som inte finns med är sådant som har att göra med att få bilden till grafikformatet EPS.

```
# Lösningar till
# ms'='-bs'-ks
# där
# s    utslag från jämviktsläge [m]
# b>0 dämpning [kg/s]
# k>0 fjäderkonstant [N/m]
# t    tid [s]
# s0   utslag då t=0 [m]
# m    massa [kg]

set size 1,1

s0=0.03

set xrange[0:2]
set yrange[-s0*1.2:s0*1.2]

set xzeroaxis

m=0.1
k=2.6
b_kritiskt=sqrt(4*m*k)
b_svagt=0.6*b_kritiskt
b_starkt=1.2*b_kritiskt

R_svagt=sqrt(4*k/m-b_svagt**2/m**2)
S_svagt(t)=exp(-b_svagt*t/(2*m))*s0*\
            (b_svagt/(R_svagt*m)*sin(R_svagt*t/2)+cos(R_svagt*t/2))

S_kritiskt(t)=(b_kritiskt*s0*t/(2*m)+s0)*exp(-b_kritiskt*t/(2*m))

R_starkt=sqrt(b_starkt**2/m**2-4*k/m)
S_starkt(t)=(R_starkt*m+b_starkt)*s0/(2*R_starkt*m)*\
            exp((R_starkt-b_starkt/m)*t/2) \
            +(R_starkt*m-b_starkt)*s0/(2*R_starkt*m)*\
            exp((-R_starkt-b_starkt/m)*t/2)

plot S_svagt(x)    title "Svagt dämpad"    lt 1,\
      S_kritiskt(x) title "Kritiskt dämpad" lt 2,\
      S_starkt(x)  title "Starkt dämpad"   lt 3
```